

Eva NOVOTNÁ<sup>1</sup>, Jiří ŠEJNOHA<sup>2</sup>, Michal ŠEJNOHA<sup>3</sup>

PŘEVOD DIAGRAMU SÍLA – PRŮHYB ZA TŘÍBODOVÉHO OHYBU NA VZTAH NAPĚTÍ – ROZEVRĚNÍ TRHLINY

TRANSFORMATION OF THE FORCE – DEFLECTION DIAGRAM UNDER A THREE-POINT-BENDING INTO THE STRESS – CRACK OPENING RELATIONSHIP

**Abstrakt**

V příspěvku je popsán analytický přechod z diagramu závislosti průhybu vzorku z betonu s příměsí polypropylenových vláken na velikosti zatěžovací síly na vztah mezi napětím a rozevržením trhliny v tahu za ohybu. Transformace je založena na kinematickém popisu chování testovaného vzorku. Napětí je aproximováno kombinací exponenciálních funkcí doplněnou o člen vystihující prokluz vláken přemostřujících trhlinu.

**Klíčová slova**

Vláknobeton, zkouška tříbodový ohybem, kinematický model, vztah napětí – rozevržení trhliny.

**Abstract**

In this paper, an analytical form of the transformation from the force – deflection diagram obtained under a three-point bending into the stress – crack opening relationship of concrete with polypropylene fibers is outlined. The transformation is based on the description of the kinematic behavior of the test sample. The stress is approximated by a combination of exponential functions supplemented with a term capturing the slip of fibers bridging the crack.

**Keywords**

Fiber reinforced concrete, three-point bending test, kinematic model of structure, stress – crack opening relationship.

## 1 ÚVOD

Důsledná mikromechanická analýza lomových vlastností vyžaduje popis stavu napětí v okolí kořene trhliny, jakož i vývoje procesní zóny. Této problematice je v České republice věnována řada prací kolektivu vedeného prof. Z. Keršnerem. Vynikající představu o jejich přístupu a přínosech dává habilitační práce V. Veselého [1], která zahrnuje několik desítek odkazů. Předložený příspěvek nabízí alternativu v rámci klasického inženýrského přístupu. Navržený model je vhodný pro zjišťování drah napětí vs. deformace u vzorků zatěžovaných ohybem za současného působení velmi vysokých teplot (požár). Těch se dosahuje elektroohřevem pomocí odporové keramické dečky. Vycházíme z kinematického popisu chování konstrukce při porušení. Inspirací pro navržený postup byl článek

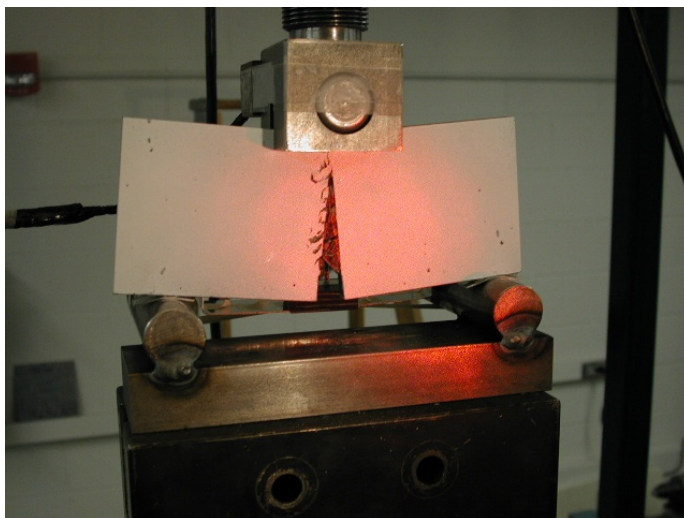
---

<sup>1</sup> Ing. Eva Novotná, Ph.D., Katedra mechaniky, Fakulta stavební, ČVUT v Praze, Thákurova 7, Praha 6, 166 29, ,tel.:(+420) 224 354 401, e-mail: eva.novotna@fsv.cvut.cz.

<sup>2</sup> prof. Ing. Jiří Šejnoha, DrSc., FEng., Katedra mechaniky, Fakulta stavební, ČVUT v Praze, Thákurova 7, Praha 6, 166 29, ,tel.:(+420) 224 354 492, e-mail: sejnoha@fsv.cvut.cz.

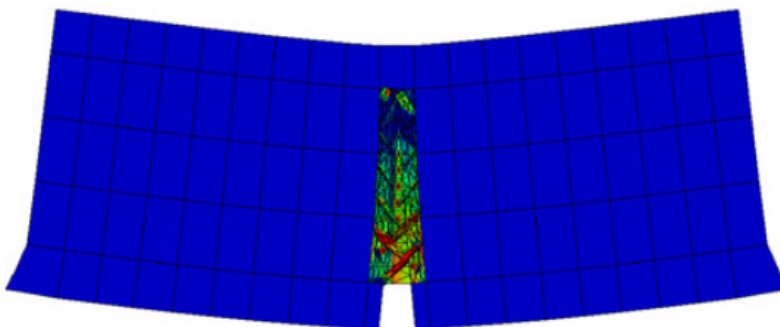
<sup>3</sup> prof. Ing. Michal Šejnoha, PhD., DSc., Katedra mechaniky, Fakulta stavební, ČVUT v Praze, Thákurova 7, Praha 6, 166 29, ,tel.:(+420) 224 354 494, e-mail: sejnom@fsv.cvut.cz.

[2]. Zjevně podobnými úvahami prošli již dříve autoři příspěvků [3], [4], [5], ale nepochybně i řada dalších badatelů. Stojí za zmínku, že v citovaných příspěvcích autoři pracují převážně s bilineárními diagramy závislosti napětí na rozevření trhliny. Z Obr. 1 je patrné, že porušení zkušební vzorku se zářezem odpovídá modelu, kdy neporušené části nosníku se po vzniku makrotrhliny v podstatě chovají jako tuhé desky.



Obr. 1: Fotografie experimentu (zdroj [2])

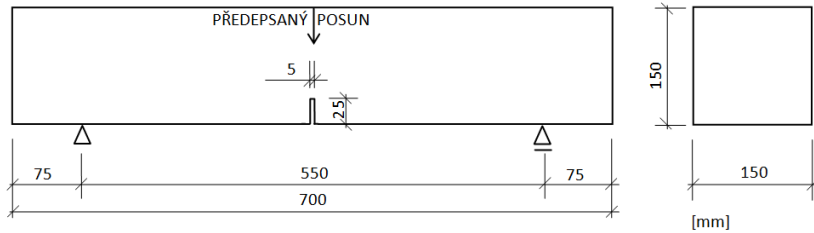
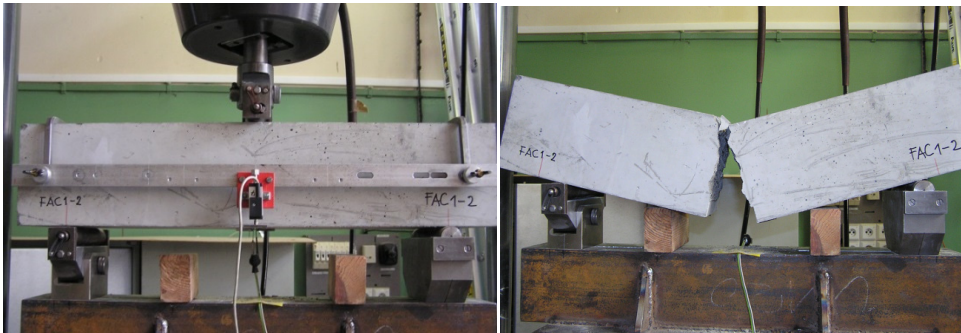
Na následujícím Obr. 2 je znázorněno poškození predikované v [1] počítačovou simulací. Je vidět, že se odehrává v zóně lokalizované deformace nad zářezem.



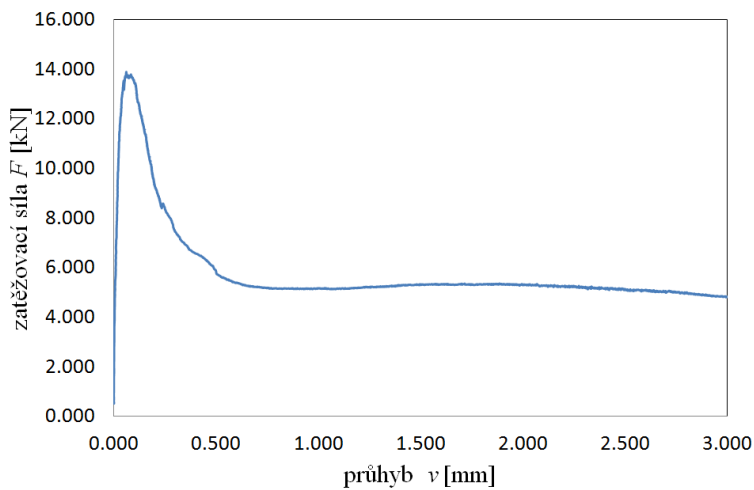
Obr. 2: Poškození zkušební vzorku (zdroj [2])

Tomuto problému byla věnována řada prací, které se v rámci inženýrského přístupu do jisté míry liší výchozími předpoklady. Jako příklad připomeňme [6], [7], [8]. Společným rysem je splnění podmínek rovnováhy sil působících na průřez uprostřed rozpětí nosníku. Základem řešení je diagram závislosti síly  $F$  na průhybu  $v$ . Zkouška tříbodovým ohybem byla provedena na trámci o velikosti 150x150x700 mm se zářezem zdola uprostřed rozpětí (hloubka zářezu 25 mm). Fotografie z provedeného experimentu a schéma rozměrů zkušební vzorku jsou na Obr. 3. Zkušební vzorek byl vyroben z vláknobetonu (obsah polypropylenových vláken byl 4,5 kg na  $m^3$  betonu.) Receptura betonové směsi je uvedena v [9].

Závislost průhybu na velikosti zatěžovací síly je v grafu na Obr. 4. Další podrobnosti o experimentu a složení betonové směsi jsou uvedeny v [10 a 11].



Obr. 3: Fotografie z experimentu a rozměry zkušební vzorku (zdroj [10])



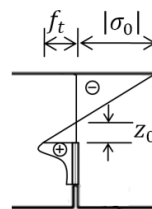
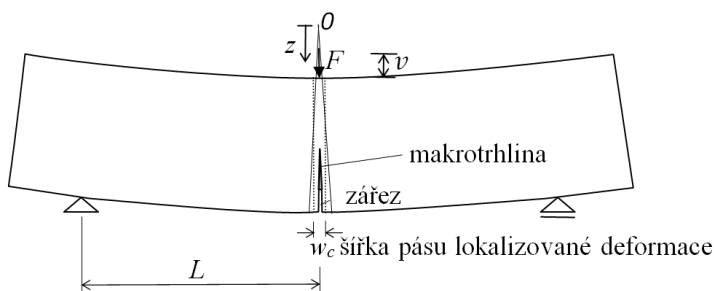
Obr. 4: Experimentálně určená závislost průhybu  $v$  na velikosti zatěžovací síly  $F$  (zdroj [10])

Príspevek je rozvržen tak, že v odst. 2 jsou nejprve popsány hlavní předpoklady modelu, navazuje aproximace napětí (odst. 3) a popis identifikace modelových parametrů. Výsledky jsou shrnuty v odst. 4, na nějž navazuje závěr (odst. 5).

## 2 PŘEDPOKLADY MODELU

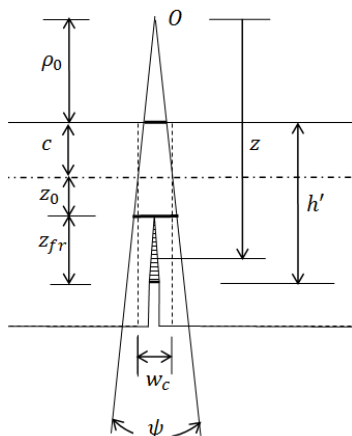
Schéma modelu je na Obr. 5. Dále je zde načrtnut předpokládaný tvar funkce napětí po výšce vzorku. Při přechodu z grafu  $F - v$  na  $\sigma_x - \delta$  je třeba dosáhnout co nejvýstižnější aproximace normálového napětí  $\sigma_x$  v části průřezu s trhlinami (viz odst. 3),  $\delta$  je rozevření trhliny.

Základem je popis deformace vzorku, při němž vyjdeme z Bernoulli-Navierovy hypotézy o zachování rovinnosti průřezu před a po deformaci.



Obr. 5: Schéma deformovaného vzorku a předpokládaný průběh napětí po výšce průřezu

Uvažujme pás lokalizované deformace tloušťky  $w_c$ , jehož stěny se otáčejí jako tuhé celky kolem středu otáčení  $O$  (Obr. 5, Obr. 6).



Obr. 6: Přetvoření v zóně lokalizace a vznik makrotrhliny

Z geometrie přetvoření (Obr. 6) snadno zjistíme, že za předpokladu malých deformací

$$\psi = \frac{w_c f_t}{z_0 E} \quad (1)$$

odkud deformace v hloubce  $z$  od středu rotace  $O$

$$\varepsilon(z) = \frac{(\psi z - w_c)}{w_c} = \frac{f_t z}{E z_0} - 1 \quad (2)$$

Protože vstupem řešení je diagram závislosti  $F - v$ , kde  $F$  je působící síla a  $v$  je průhyb, je třeba vyjádřit funkci  $\varepsilon$  v závislosti na  $v = v_1 + v_2$ . Složka  $v_1$  představuje pružný průhyb konzoly délky  $L - \frac{w_c}{2}$ . Nepružnou složku  $v_2$  získáme z Obr. 6 za předpokladu, že přilehlé konzoly jsou tuhé a deformuje se jen vrstva s trhlinou. Potom

$$\psi = v_2 \frac{2}{L} \cong \left[ v - \frac{F \left( L - \frac{w_c}{2} \right)^3}{6EI} \right] \frac{2}{L} \quad (3)$$

Konečně rozevření trhliny v hloubce  $z$  bude

$$\delta(z) = \left[ \varepsilon(z) - \frac{f_t}{E} \right] w_c + \delta_y(z) = \psi z - w_c \left( 1 + \frac{f_t}{E} \right) + \delta_y(z), \quad (4)$$

kde  $\delta_y(z)$  je přírůstek rozevření trhliny vlivem prokluzu vláken přemostřujících trhlinu.

Lze se přesvědčit, že v hloubce  $z = \rho_0 + c + z_0$  je  $\delta(z) = \delta_y(z) = 0$ . K tomu stačí uvážit, že  $\psi \cdot (\rho_0 + c) = w_c$ ,  $\psi z_0 = (f_t/E)w_c$  a samozřejmě podmínku

$$\delta_y(\rho_0 + c + z_0) = 0. \quad (5)$$

Zbývá vyjádřit přírůstek rozevření trhliny vlivem prokluzu. Využijeme lineární aproximace splňující podmínku (5). Spojením vzorců (3) a (4) a tohoto předpokladu vyjde

$$\frac{\delta(z)}{w_c} = \left[ v - \frac{F \left( L - \frac{w_c}{2} \right)^3}{6EI} \right] \frac{2z}{L w_c} - \left( 1 + \frac{f_t}{E} \right) + \frac{\kappa}{w_c} \left[ z - z_0 \left( 1 + \frac{f_t}{E} \right) \right], \quad (6)$$

kde  $\kappa$  je zatím neznámá konstanta. Při úpravě jsme využili úměry z Obr. 6, z níž plyne vztah  $\rho_0 + c = z_0 E / f_t$ . Poznamenejme, že  $z_0$  se vyloučí spojením vztahů (1) a (3).

### 3 APROXIMACE NAPĚTÍ

Napětí se aproximuje po částech dvěma funkcemi. V neporušené části se uvažuje pružné chování materiálu a funkce napětí má tvar

$$\sigma = f_t \frac{z}{z_0} - E. \quad (7)$$

V porušené části je  $\sigma(\delta)$  aproximováno řadou exponenciálních funkcí

$$\sigma(\delta) = f_t + \sum_i \alpha_i (1 - \exp(-\beta_i(\delta))) + \Delta\sigma_y. \quad (8)$$

Korigující člen  $\Delta\sigma_y$  odpovídá poklesu napětí ve vláknech prokluzem. K tomuto účelu použijeme aproximaci z mikromechaniky navrženou v [12] ve tvaru

$$\Delta\sigma_y = \begin{cases} \sigma_m \left[ 2 \left( \frac{\delta_y}{\delta_m} \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{\delta_y}{\delta_m} \right] & \text{pro } 0 \leq \delta_y \leq \delta_m \\ \sigma_m \left[ 1 - \frac{2(\delta_y - \delta_m)}{L_f} \right]^2 & \text{pro } \delta_y \geq \delta_m \end{cases}, \quad (9)$$

kde  $\sigma_m$  a  $\delta_m$  jsou na rozdíl od původního modelu [12] neznámé parametry. Poměrné přetvoření ve vztahu (8) vyjádříme pomocí aproximace (6), kde  $\alpha_i$  a  $\beta_i$  jsou rovněž neznámé parametry.

Pro výsledné napětí v průřezu musí být normálová síla rovna nule, a tedy

$$\int \sigma dz = 0. \quad (10)$$

Z rovnice (10) lze určit pro každou dvojici hodnot  $F$  a  $v$  hodnotu napětí  $|\sigma_0|$  v horních vláknech průřezu (viz Obr. 5). Ohybový moment plyne ze vztahů

$$\bar{M} = \frac{FL}{2} \quad (11)$$

a

$$\frac{M}{b} = \int \sigma(z)z dz = \frac{FL}{2b} . \quad (12)$$

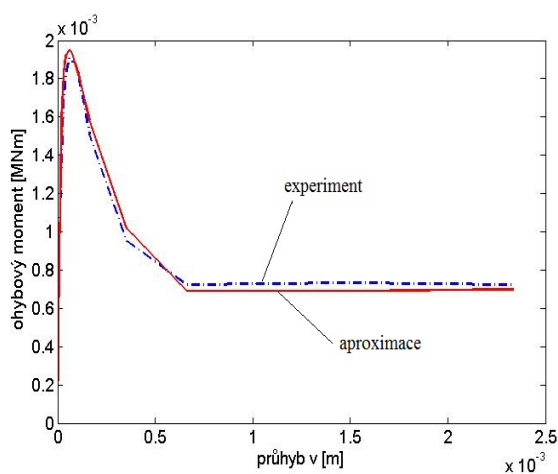
Pro vybranou hodnotu průhybu  $v_\lambda$  a jí odpovídajícímu momentu  $\overline{M}_\lambda$  získaného pomocí vztahu (11) z Obr. 4 lze pak s využitím rovnic (8) až (12) určit parametry  $\alpha_i, \beta_i, \kappa, \sigma_m, \delta_m$  z optimalizační podmínky

$$\sum_{\lambda} (M_\lambda - \overline{M}_\lambda)^2 \rightarrow \min, \quad (13)$$

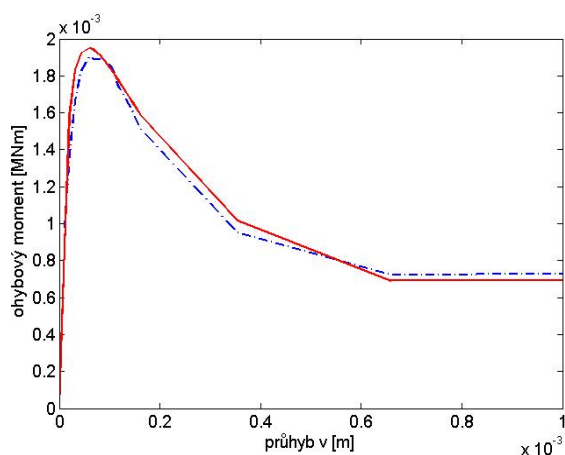
kde  $\lambda$  je počet vybraných momentů.

#### 4 VÝSLEDKY

Na Obr. 7a je graf závislosti průhybu testovaného vzorku na ohybovém momentu, kde čerchovanou čarou jsou vyznačena data z experimentu a plnou hodnoty predikce teoretickým modelem. Obr. 7b znázorňuje část grafu v detailu.



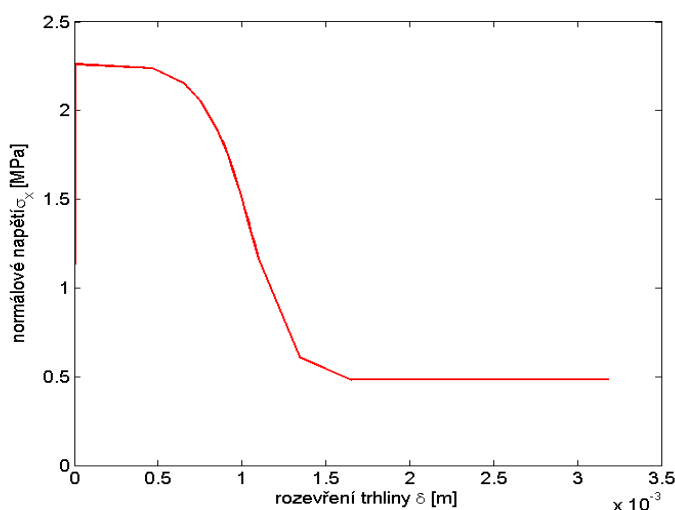
a)



b)

Obr. 7a a 7b: Grafy závislosti průhybu na ohybovém momentu (čerchovaná čára experiment, plná čára je výstupem z aproximace)

Hledaný graf závislosti napětí  $\sigma_x$  na rozevření trhliny  $\delta$  je na Obr. 8.



Obr. 8 Graf závislosti  $\sigma_x - \delta$

Šířka lokalizačního pásu byla odhadnuta v souladu s doporučením [13] jako trojnásobek průměru největšího zrna kameniva, tj.  $w_c \cong 50$  mm. Tuto veličinu lze ovšem dále upřesnit v rámci optimalizační podmínky (13). Maximální rozevření trhliny predikované modelem odpovídá experimentálně zjištěné hodnotě 3,2 mm. Při zanedbání prokluzu vlákna a jeho protažení by pak poměrné přetvoření mohlo být aproximováno poměrem  $\delta/w_c$ , viz vzorec (6).

## 5 ZÁVĚR

V předloženém příspěvku je nastíněn jeden z možných inženýrských přístupů k predikci pracovního diagramu vláknobetonu v tahu za ohybu z výsledků zatěžovací zkoušky třibodovým ohybem. Již z experimentu bylo patrné, že prvky z vláknobetonu si uchovávají reziduální napětí i po vzniku prvních trhlin, kdy tah v průřezu přebírají zatím neporušená vlákna. Postup vychází z kinematického popisu modelu. Průběh napětí je určen optimalizací s využitím podmínek rovnováhy. V porušené části je průběh napětí aproximován exponenciálními funkcemi. Pokročilá fáze experimentu, kdy dochází k prokluzu mikrovláken přemostujících trhliny, je v modelu vystižena doplňujícím členem, který je modifikací vztahu závislosti napětí na rozevření trhliny navrženého na základě mikromechanických úvah profesorem Li. Parametry těchto funkcí byly stanoveny simulací ve spojení s metodou nejmenších čtverců. Určitá diskrepance mezi experimentální závislostí ohybového momentu (resp. působící síly) na průhybu a jeho modelovou predikcí jde zřejmě na vrub malého počtu členů v Dirichletově řadě (záměrně zvoleny jen dva členy). Další možností zpřesnění predikce kromě zvýšeného počtu členů v aproximaci (8) a sčítanců v (13), je zahrnutí šířky lokalizačního pásu  $w_c$  mezi optimalizační parametry.

Navržený model nabízí možnost testování vzorků při velmi vysokých teplotách.

## PODĚKOVÁNÍ

Tento výsledek byl vytvořen s finanční podporou programu TA ČR, projekt TA01030245 a projektu studentské grantové soutěže ČVUT v Praze, registrační číslo projektu je SGS14/122/OHK1/2T/11.

## LITERATURA

- [1] V. VESELÝ, Role of process zone in quasi-brittle fracture. Habilitační práce, Fakulta stavební VUT v Brně 2015.
- [2] V. ŠMILAUER, C. G. HOOVER, Z. P. BAŽANT, F. C. CANER, A. M. WAAS, K. W. SHAHWAN, Multiscale simulation of fracture of braided composites via repetitive unit cells. *Engineering Fracture Mechanics*. 2011, vol. 78, no. 6, p. 901-918. ISSN 0013-7944.M.
- [3] J. P. ULFKJÆR, S. KRENK, R. BRINCKER, Analytical model for fictitious crack propagation in concrete beams, *Journal of Engineering Mechanics* 121(1) (1995), pp. 7–15
- [4] H. STANG, J. F. OLESEN, On the interpretation of bending tests on FRC materials, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 5, pp. 123–132
- [5] T. PAIL, P. FRANTÍK, Modeling the wedge splitting test using an extended cracked hinge model. *Engineering MECHANICS*, Vol. 21, No. 1. pp. 67-72
- [6] M. DRAHORÁD, Analýza metodiky a poznatků experimentálního výzkumu charakteristik vláknobetonu. Doktorská disertační práce, Fakulta stavební ČVUT v Praze, 2011.
- [7] J. KRÁTKÝ, J. VODIČKA, VAŠKOVÁ J., Determination of Tensile Part of Fibre Concrete Stress-Strain Diagram from Bending Test Measurements. In *Fibre Concrete – Technology, Design, Application*. Praha: České vysoké učení technické v Praze, Fakulta stavební, 2009, p. 167–174. ISBN 978-80-01-04381-3
- [8] M. YANG, Ch. J. HUANG, J. WANG, Stress-strain Curve of High Strength Steel Fiber Reinforced Concrete under Uniaxial Tension. *Journal of Wuhan University of Technology-Mater Sci Ed* 21(3):132-137 · September 2006
- [9] M. BROUČEK, M. ŠEJNOHA, Receptury použité pro návrh betonových a alkalicky aktivovaných směsí. Technický list projektu TAČR TL105, 2011.
- [10] M. ŠEJNOHA, M. BROUČEK, E. NOVOTNÁ, Z. KERŠNER, F. LEHKÝ, P. FRANTÍK, Fracture properties of cement and alkali activated fly ash based concrete with application to segmental tunnel lining, *Advances in Engineering Software*, 2013, 61-71
- [11] M. BROUČEK, M. ŠEJNOHA, Mechanické parametry betonových a alkalicky aktivovaných směsí s příměsí a bez příměsí popílku a vláken. Technický list projektu TAČR TL106, 2011.
- [12] V. C. LI, C. K. Y. LEUNG, Steady State and Multiple Cracking of Short Random Fiber Composites *ASCE Journal of Engineering Mechanics*, *ASCE J. of Engineering Mechanics*, Vol. 188, No. 11, pp. 2246-2264, 1992.
- [13] Z. BAŽANT, L. CEDOLIN, *Stability of Structures: Elastic, Inelastic, Fracture and Damage Theories*, Oxford University Press, New York, 1991.

### Oponentní posudek vypracoval:

Prof. Ing. Milan Moravčík PhD., Katedra stavebních konstrukcí a mostov, Stavební fakulta, ŽU v Žiline.

Ing. Petr Frantík, Ph.D., Ústav stavební mechaniky, Fakulta stavební, VUT v Brně.