POSOUZENÍ MODELŮ ODHADU TRŽNÍHO RIZIKA S VYUŽITÍM DEA PŘÍSTUPU

Aleš Kresta, Tomáš Tichý, Mehdi Toloo*

Abstract

Examination of Market Risk Estimation Models via DEA Approach Modelling

Measuring and managing of financial risks is an essential part of the management of financial institutions. The appropriate risk management should lead to an efficient allocation of available funds. Approaches based on Value at Risk measure have been used as a means for measuring market risk since the late 20th century, although regulators newly suggest to apply more complex method of Expected Shortfall. While evaluating models for market risk estimation based on Value at Risk is relatively simple and involves so-called backtesting procedure, in the case of Expected Shortfall we cannot apply similar procedure. In this article we therefore focus on an alternative method for comprehensive evaluation of VaR models at various significance levels by means of data envelopment analysis (DEA). This approach should lead to the adoption of the model which is also suitable in terms of the Expected Shortfall criterion. Based on the illustrative results from the US stock market we conclude that NIG model and historical simulation should be preferred to normal distribution and GARCH model. We can also recommend to estimate the parameters from the period slightly shorter than two years.

Keywords: model quality, data envelopment analysis, market risk, Value at Risk, historical simulation, NIG

JEL Classification: C52, C58, G21

Úvod

Tržní rizika představují významnou část rizikového profilu finančních institucí a zejména těch, které jsou aktivní mezinárodně. Například v rámci bankovního sektoru jsou taková rizika zahrnuta do kapitálového požadavku ze strany regulátorů a již od roku 1996 (tzv. Basel Accord, aktualizováno jako BCBS (1998)) je pro jejich měření doporučováno využít vlastní modely na bázi míry rizika obecně označované jako *Value at Risk* (VaR). Ta odpovídá záporné hodnotě příslušného percentilu pravděpodobnostního rozdělení budoucích výnosů obchodního portfolia. Následně se tato doporučení rozšířila i pro další finanční instituce, včetně pojišťoven.

Jako odpověď na nedávnou nestabilitu na finančních trzích, určitou procykličnost VaR, nebezpečí systémového rizika a s tím související hrozbu řetězového úpadku finančních institucí je v současnosti upřednostňováno provázání disponibilního kapitálu na šířeji

* **Aleš Kresta** (ales.kresta@vsb.cz), **Tomáš Tichý** (tomas.tichy@vsb.cz), **Mehdi Toloo** (mehdi.toloo@vsb.cz), Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava, Ekonomická fakulta.
Významná část tohoto příspěvku vznikla v rámci projektu Grantové agentury České republiky (GAČR): 13-13142S a dále projektu SGS VŠB-TUO SP2017/32.

pojatou míru rizika *Expected Shortfall* (ES) či *Conditional Value at Risk* (CVaR), která je určena jako podmíněná střední hodnota; blíže např. viz Rockafellar a Uryasev (2002).

Orgány dohledu přirozeně umožňují finančním institucím využívat pouze takové modely, které splňují stanovená kritéria kvalitativní i kvantitativní povahy; pro podrobnosti např. viz Resti a Sironi (2007). To mimo jiné zahrnuje i techniku zpětného testování, v rámci níž jsou selhání modelu pozorovaná za určité období porovnána s jejich předpokládaným počtem. Selháním je přitom chápána taková situace, kdy je realizovaná ztráta vyšší než ztráta predikovaná na dané hladině významnosti. Hladina významnosti tak určuje předpokládaný počet selhání za daný horizont. Například u období, které zahrnuje 100 pozorování, by při hladině významnosti 1 % bylo možné očekávat jedno selhání modelu.

Uvedená technika je poměrně dobře použitelná pro ověření funkčnosti modelů na bázi míry rizika VaR, nicméně v případě míry rizika ES je její použití značně omezené. Důvodem je skutečnost, že zatímco míra VaR je definována jako příslušný percentil, který buď je, nebo není překročen, a jedná se tak o poměrně dobře testovatelnou binární proměnnou, spolehlivé ověření míry ES, což je podmíněná střední hodnota, je znatelně složitější.

To pravděpodobně vedlo některé autority ke značně spornému doporučení – provázat regulatorní kapitál na míru ES, avšak ověření modelu provádět pomocí míry VaR. Uvedený postup by sice fungoval velmi dobře za předpokladu normálního rozdělení logaritmických výnosů finančních aktiv, jenže empirické výnosy oproti normálnímu rozdělení vykazují těžší konce, které navíc nejsou symetrické, viz například Fama (1965), Mandelbrot (1963, 1967) nebo Mandelbrot a Taylor (1967). Přirozeně existují studie, jejichž autoři se zaměřují na možnosti přímého testování měr rizika na bázi ES (či CVaR), viz např. Du a Escanciano (2015), navržené postupy jsou však poměrně náročné a ne vždy spolehlivé.

S ohledem na to je v tomto článku blíže zkoumán alternativní postup vyhodnocení různých modelů VaR pomocí metody DEA při komplexním posouzení celé řady hladin významnosti (Kresta a Tichý, 2016). Model, který se při takto komplexním posouzení na bázi VaR ukáže jako efektivní (stejný či lepší než ostatní posuzované modely), by měl vykazovat i efektivní odhad míry ES. Je to dáno tím, že míra ES na hladině významnosti p odpovídá váženému průměru všech percentilů z intervalu $(0, p]$ (a tím i hodnotám VaR).

Postup článku je následující. Nejprve jsou stručně shrnuty základní východiska pro řízení rizik finančních institucí s ohledem na kapitálovou přiměřenost a zpětné testování. Poté je definována analýza obalu dat s uvedením konkrétního modelu, který je posléze využit pro komplexní posouzení vybraných modelů pro odhad tržního rizika. Studované modely se jednak liší svými předpoklady ohledně pravděpodobnostního rozdělení výnosů, jednak jsou studovány různé intervaly pro odhad vstupních dat. Tyto modely zahrnují standardní předpoklad normálního rozdělení (*Gaussian innovations*, GI), pokročilý model Lévyho typu (*Normal Inverse Gaussian Innovations*, NIG), semiparametrický model pro volatilitu výnosů typu AR(1)-GARCH(1,1) s přírůstky na bázi normálního rozdělení (AGG) a historickou simulaci (HS) a spolu s daty jsou blíže objasněny ve čtvrté části. Následně je realizován numerický experiment pomocí různých sérií dat indexu akciového trhu S&P 500 a jednotlivé modely jsou komplexně vyhodnoceny pro celé spektrum hladin významnosti, konkrétně od 15 % až po 0,5 % (maximální citlivost).

1. Řízení tržních rizik ve finančních institucích

Je přirozené, že finanční instituce, jako banky, pojišťovny nebo investiční společnosti, se povahou svých aktivit výrazně odlišují od nefinančních institucí, jako jsou třeba výrobní podniky. Je to dáno tím, že pro vykonávání své funkce, jako je přenos kapitálu, rizika, likvidity a splatnosti mezi jednotlivými subjekty, potřebují důvěru klientů, kteří jsou zároveň věřiteli, případně majiteli.

Vzhledem k tomu, že důvěra klientů je spíše abstraktní a těžko měřitelný pojem, má se zato, že je vyjádřena rizikovostí subjektu, tedy spolehlivostí, s jakou daná finanční instituce dodrží své závazky, ať už finanční, či morální povahy. Zde můžeme rozlišit samoregulaci, kdy se management snaží prostřednictvím vhodné kombinace kapitálu a rizikovosti aktiv dosáhnout cílového ratingu, nebo řízení (nad)národními orgány regulace a dohledu, které stanovují mantinely pro chování finančních institucí a následně dohlížejí na jejich dodržování. V obou případech však je klíčové spolehlivé určení míry rizika, včetně jejího testování. Podrobnější vymezení postupů lze nalézt v některé z monografických publikací, jako Hull (2013) nebo Resti a Sironi (2007), případně v přechozích pracích autorů tohoto textu (Kresta a Tichý, 2012 či Tichý, 2010).

1.1 Míry tržního rizika

Přirozenou mírou rizika je směrodatná odchylka, respektive rozptyl. V tomto případě je však znatelnou nevýhodou shodná penalizace pozitivních i negativních odchylek od střední hodnoty. Z pohledu regulátorů finančních institucí jsou proto mnohem zajímavější míry, které zohledňují pouze tu část rizika, která by mohla vést ke ztrátě a potenciálně i úpadku subjektu.

Mírou negativního rizika, která dosáhla největšího rozšíření, je VaR (*Value at Risk*), $VaR_X(\Delta t,p)$ – ta pro časový horizont Δt a na hladině významnosti p určuje minimální x (záporný minimální výnos portfolia X nebo též maximální ztrátu z jeho držení), pro které platí, že náhodná veličina X bude menší nebo rovna x alespoň s pravděpodobností p:

$$VaR_X(\Delta t, p) = -\min\left\{x \middle| Pr(X \le x) \ge p\right\}. \qquad (1)$$

Tato míra tedy odpovídá záporné hodnotě p-percentilu pravděpodobnostního rozdělení výnosů. Neboť však míra VaR neříká nic o tom, k jak velké ztrátě může ve skutečnosti s danou pravděpodobností dojít,[1] je současně dle Basel III doporučováno[2] sledovat i kritérium na bázi střední hodnoty pro případ, že dojde k překročení hodnoty VaR. Toto kritérium může mít například následující podobu (*Expected Shortfall*):

$$ES_X(\Delta t, p) = -\mathrm{E}\left[x \middle| -x > VaR_X(\Delta t, p)\right]. \qquad (2)$$

Z formulací (1) a (2) je zřejmé, že $ES_X(\Delta t, p)$ lze aproximovat jako vážený průměr $VaR_X(\Delta t,i)$, kde $i \in (0, p]$.

1 Pouze říká, že ztráta bude s danou pravděpodobností p alespoň ve výši x. Matematicko-teoretickou námitkou vůči VaR také je, že se nejedná o koherentní míru rizika, viz Artzner *et al.* (1999), byť ve finanční praxi se VaR chová převážně koherentně.

2 Viz BCBS (2013), případně též Kinateder (2016), který kvantitativně porovnává původní metodiku BCBS (1998) se dvěma verzemi Basel III.

1.2 Využití při řízení rizik ve finančních institucích

O celkové strategii řízení rizik a detailních krocích jejího naplnění rozhoduje vrcholový management, přičemž by měl brát v potaz cíl subjektu v podobě cílového ratingu i veškerá vnější omezení, zejména regulatorní, a jiné legislativní požadavky.

V rámci přístupu na bázi interního ratingu se subjekty snaží držet kapitál alespoň v takové výši, aby dosáhly na žádoucí rating. Tento rating by měl vycházet z požadavků akcionářů a schválené strategické politiky subjektu a implikovat určitou pravděpodobnost selhání (tj. pravděpodobnost, že subjekt nebude schopen dostát svým závazkům). Právě tato pravděpodobnost pak určuje hladinu významnosti p, na které by měly být míry rizika počítány. Z nich je pak odvozena výše kapitálu potřebná pro pokrytí neočekávané ztráty na stanovené hladině významnosti.

Za předpokladu, že subjekt zajímá opravdu jen pravděpodobnost selhání a nikoliv následky, jako jsou třeba dopady na klienty a věřitele a zprostředkovaně celý finanční sektor, případně necílí na dlouhodobou existenci, pak se míra VaR zdá být vhodným prostředkem pro určení optimální výše kapitálu – co se stane v případě selhání, tedy není podstatné.

Oproti tomu princip kapitálové přiměřenosti z pohledu regulátora má mnohem více makroekonomickou úlohu – klíčové je, aby finanční systém plnil svou funkci a přispíval ke stabilitě celé ekonomiky, případně jejímu udržitelnému růstu. Z tohoto pohledu je tedy přirozené, že regulátor je mnohem citlivější na potenciální selhání subjektů s významným tržním podílem a rovněž se zajímá, jaké by mohly být důsledky takovýchto selhání. Míra ES proto může být vnímána jako vhodnější měřítko rizika, neboť neudává jen hodnotu příslušného percentilu, nýbrž očekávanou hodnotu pro případ selhání (právě proto název *Expected Shortfall*).

1.3 Metody výpočtu

Pro výpočet měr rizika VaR a ES lze použít několik principiálně odlišných postupů a je přirozené, že výpočet ES je náročnější (nepočítáme pouhý percentil, nýbrž podmíněnou střední hodnotu).

Relativně jednoduchým, neparametrickým postupem je metoda *historické simulace*, kdy není třeba žádného předpokladu ohledně podkladového pravděpodobnostního rozdělení výnosů, neboť jsou využita minulá historická pozorování. Metoda obvykle funguje hůře pro nižší hladiny významnosti. To je dáno tím, že ke spolehlivému odhadu konců pravděpodobnostního rozdělení je třeba dlouhé časové řady, která však na druhou stranu může vést ke ztrátě informací (v průběhu času zpravidla dochází ke strukturálním změnám).

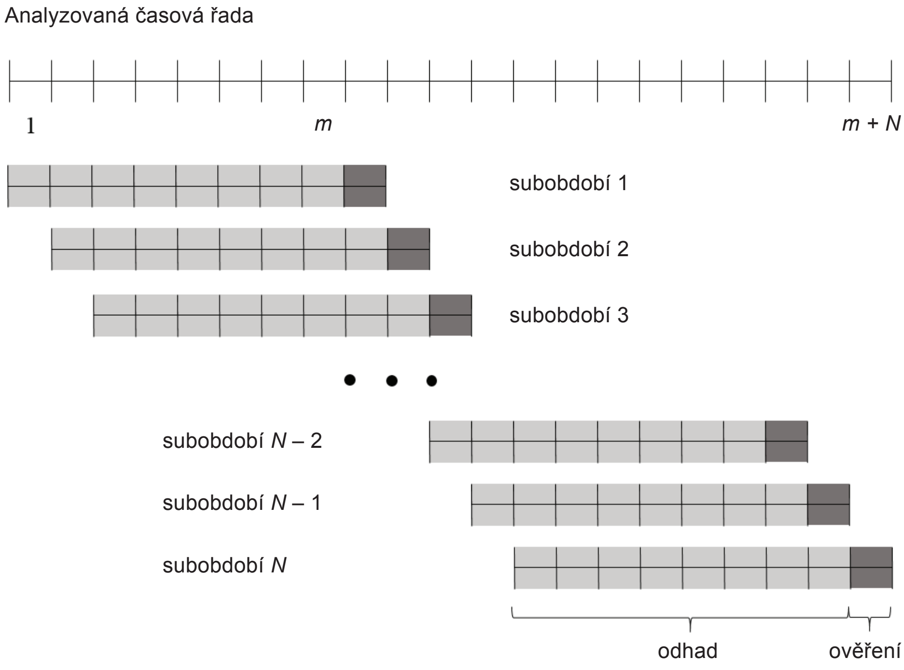
Ideálním případem je, pokud je možné zvolit parametrický přístup na bázi pravděpodobnostního rozdělení, které je dostatečně tvárné, tj. je možné vypočíst jak VaR, tak ES *analyticky* pomocí odvozené formule. Příkladem může být normální (Gaussovo) rozdělení pravděpodobnosti, jehož nevýhodou však je neschopnost zachytit často empiricky pozorované vyšší momenty pravděpodobnostního rozdělení (šikmost a špičatost, respektive s ní související těžké konce). Modely, které toto umožňují, jako například složené Lévyho procesy, jsou na druhou stranu komplexnější a míry rizika tak je často nezbytné vypočíst pomocí specifických numerických postupů nebo simulačně.

Alternativní možností je kombinace vhodného pravděpodobnostního rozdělení s neparametrickým přístupem, mj. modelování klíčové proměnné pomocí modelu autoregresivního typu, jako je např. v tomto článku využitý model AR-GARCH.

1.4 Zpětné testování

S ohledem na svou definici jako kvantilu pravděpodobnostního rozdělení je kvalita odhadu míry VaR na dané hladině významnosti p zpravidla posuzována pro minulé časové období o *N pozorováních* na základě srovnání počtu pozorovaných selhání (viz obrázek 1) s očekáváním. V podstatě se tedy jedná o to, že je-li pozorovaná ztráta v daném okamžiku vyšší než odhadnuté VaR, zaznamenáme číslo 1 (tzv. výjimka), jinak 0. S výjimkou začátku časové řady použité pro prvotní odhad parametrů modelu o délce m pak sečteme počet pozorování, kdy došlo k výjimce. Tento součet by měl přibližně odpovídat součinu N a p.

Obrázek 1 | Znázornění postupu zpětného testování



Zdroj: vlastní zpracování

Rovnost přirozeně nastane jen velmi zřídka, nicméně čím si jsou hodnoty bližší, tím je model možné považovat za spolehlivější. Pokud by počet pozorovaných výjimek výrazně převyšoval jejich předpokládaný počet, jednalo by se o podcenění rizika – kapitál určený na bázi VaR by nedostačoval ke krytí rizika na dané hladině významnosti. V opačném případě by kapitál byl příliš vysoký, což by omezovalo rentabilitu a tím i konkurenceschopnost subjektu na trhu.

Dalším kritériem, které je při zpětném testování třeba zohlednit, je, zda jsou pozorované výjimky rozmístěny v čase rovnoměrně, tj. zda nedochází k jejich shlukům – několik neočekávaných ztrát jdoucích po sobě by nabouralo princip kapitálové přiměřenosti na bázi VaR.

Neboť modely na bázi míry VaR jsou totiž poměrně dlouhou dobu široce akceptovány jako prostředek měření a řízení rizika ve finančních institucích a celá řada autorů se již zabývala metodami pro analýzu jejich výkonnosti. První práce byly přirozeně zaměřeny na ideální testovací procedury. Již Kupiec (1995) analyzoval statistické vlastnosti výjimek a možnosti (a schopnosti) jejich testování. Poukázal například na problémy spojené s testy na bázi TUFF (*time until first failure*) a rovněž vyjádřil minimální počty pozorování *N* pro úspěšnou aplikaci testů na bázi PF (*proportion of failures*), které jsou de facto využívány v rámci regulace bank. Zatímco první uvedený je vhodnější nahradit testy na bázi durace, tj. dochází k měření délky mezi jednotlivými selháními modelu (Christoffersen a Pelletier, 2004), druhý jmenovaný by měl být doplněn testem podmíněného pokrytí dle Christoffersena (1998). Komplexnější srovnání pak lze nalézt v Berkowitzovi *et al*. (2011) nebo v Leccaditovi *et al*. (2014).

V pozdějších letech pak byla pozornost zaměřena též na analýzu reálného chování modelů na bázi VaR a případně i systémových dopadů jejich používání, viz například Pérignon a Smith (2010) či Berkowitz a O'Brien (2002), kteří s využitím bankovních reportů regulátorům (v USA) došli k závěru, že reálné modely jsou spíše konzervativní a nezohledňují denní volatilitu odpovídajícím způsobem. Další skupina prací pak byla zaměřena na posouzení rozličných modelů pro případ hypotetických portfolií, jako bylo porovnání jednoduchých pozic pomocí Gaussova, Studentova, GARCH a empirických modelů, viz Alexander a Sheedy (2008), analýza obdobných modelů spojených pomocí kopula funkcí (Rank, 2007), porovnání historické simulace a tzv. *filtred bootstrap* pro případ 15 převážně akciových indexů (Brandolini a Golucci, 2012) či úvaha složitějších portfolií (Kresta a Tichý, 2012).

Tyto modely byly v různých studiích aplikovány na různé instrumenty a časová období. Z článků obsahujících empirickou aplikaci na indexu S&P 500 lze zmínit studii Wonga (2010) prováděnou v období let 1986–2000 nebo Escanciana a Olmy (2010) pro období let 2000–2006.

Na druhou stranu testování míry rizika ES byla s ohledem na její složitost věnována mnohem menší pozornost a studií tak je poměrně málo – výjimku tvoří například Du a Escanciano (2015), případně Emmer *et al*. (2015). S ohledem na to se spíše doporučuje testovat celou distribuční funkci či alespoň její významnou část. V tomto článku však volíme jinou cestu, a to komplexní vyhodnocení modelu VaR pro celou škálu hladin významnosti, což lze chápat i jako postup vedoucí k vyhodnocení modelu na širokém úseku distribuční funkce.

2. Model analýzy obalu dat

Model analýzy obalu dat (*data envelopment analysis*, DEA) představuje ve své základní definici matematický přístup k posouzení skupiny pokud možno stejnorodých jednotek, obecně označovaných jako DMU (*decision making units*), které při své činnosti přeměňují vstupy (*inputs*) ve výstupy (*outputs*) – obecně jakákoliv data kvantitativní povahy přítomná u každé ze studovaných jednotek. Od svého uvedení byla metoda přirozeně mnohokrát modifikována tak, aby mohla být aplikována na řešení celé škály původně nezamýšlených problémů.

Základ metody se vztahuje k článku Charnes *et al*. (1978), kde byl maximalizován poměr váženého součtu výstupů k váženému součtu vstupů pro jednotlivé DMU s tím, že tento poměr nesmí být pro žádnou DMU vyšší než jedna. Uvažujme n DMU (DMU_j, $j = 1, \ldots, n$) s m vstupy, $x_j = (x_{1j}, \ldots, x_{mj})$, a s výstupy, $y_j = (y_{1j}, \ldots, y_{sj})$. Následující model, označovaný dle autorů jako CCR (Charnes, Cooper, Rhodes), měří relativní skóre efektivnosti studovaných DMU. Pro každou DMU_o, $o = 1, \ldots, n$, je potřeba vyřešit následující optimalizační úlohu,

$$max \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{ro}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{io}} \ , \tag{3}$$

za podmínek

$$\frac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}} \leq 1 \quad j = 1, \ \ldots, \ n \ ,$$

$$u_r \geq \varepsilon \ \forall r$$

$$v_i \geq \varepsilon \ \forall i \ ,$$

kde $v = (v_1, \ldots, v_m)$ a $u = (u_1, \ldots, u_s)$ jsou neznámé váhy vstupů a výstupů a ε je nekonečně malé číslo – tuto podmínku přidáváme za účelem vyloučení nulových hodnot vah jednotlivých vstupů a výstupů (viz Amin a Toloo, 2004).

Uvedená formulace (3) může být za účelem snadnějšího řešení převedena dle Charnese a Coopera (1962) na následující problém lineárního programování:

$$\max \theta = \sum_{r=1}^{s} u_r y_{ro} \tag{4}$$

za podmínek

$$\sum_{i=1}^{m} v_i x_{io} = 1$$

$$\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} \leq 0 \quad j = 1, \ \ldots, \ n$$

$$u_r \geq \varepsilon \ \forall r$$

$$v_i \geq \varepsilon \ \ \forall i \ .$$

Úlohu (4) lze stejně jako ostatní úlohy lineárního programování řešit simplexovou metodou. Předpokládejme, že θ^*, v^*, u^* je optimální řešení úlohy (4). Zkoumaná jednotka DMU_o je efektivní pouze tehdy, když $\theta^* = 1$ a existuje alespoň jedno striktně pozitivní optimální řešení. Pokud $\theta^* < 1$, je zkoumaná jednotka neefektivní, to znamená, že (lineární) kombinací ostatních jednotek lze sestrojit hypotetickou jednotku, která ji bude dominovat. Proměnnou θ nazýváme skóre efektivnosti.

3. Data a posuzované modely

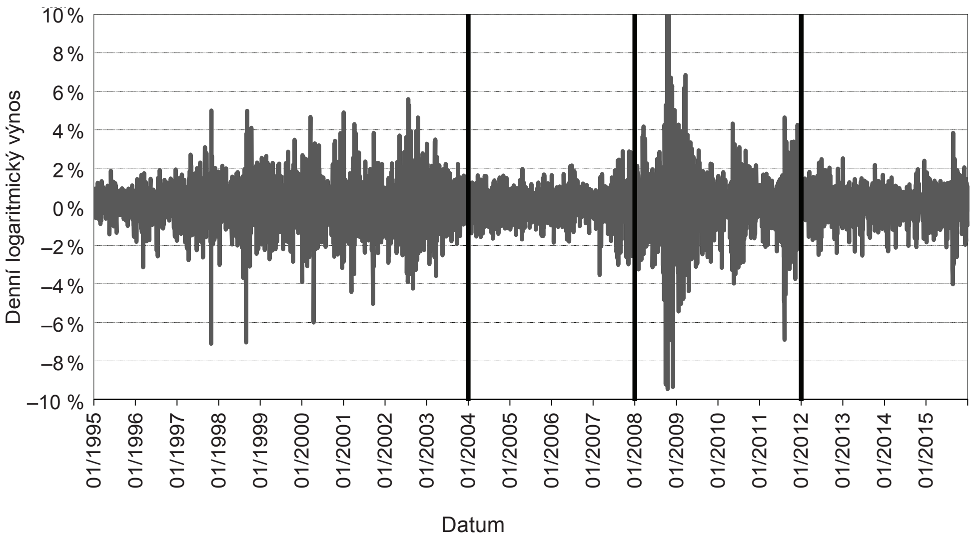
V této části jsou za účelem možného budoucího porovnání s dalšími studiemi definována použitá data (index akciového trhu) i modely pro odhad míry rizika VaR.

Pro ověření modelů odhadu VaR pracujeme s denními daty indexu amerického akciového trhu S&P 500 staženými z www.finance.yahoo.com, který volíme pro jeho likviditu, vysokou míru efektivnosti i poměrně dobré zotavení z nedávné finanční krize. Z dostupné datové série posledních 20 let (do konce roku 2015) jsou nejprve vypočteny logaritmické výnosy,

$$r_t = \ln\left(\frac{r_t}{r_{t-1}}\right). \tag{5}$$

Na základě jejich grafického posouzení, viz obrázek 2, pak vybíráme tři na sebe navazující úseky o shodné délce 4 let (přibližně 1 000 dat), viz tabulka 1. První z nich (2004–2007) lze charakterizovat poměrně nízkým výnosem (ve srovnání s tehdejším výnosem bezrizikových dluhopisů) s relativně nízkou a poměrně stabilní volatilitou. Druhé období (2008–2011) zahrnuje krizový rok 2008 a následující turbulentní období charakteristické záporným výnosem s velmi vysokou volatilitou a významnou špičatostí. Ve třetím období (2012–2015) bylo možné pozorovat korekci propadu druhého období a toto období lze chápat jako určitý návrat do normálu co se týče volatility i špičatosti.

Obrázek 2 | Vývoj logaritmických výnosů indexu S&P 500 (1995–2015)



Zdroj: vlastní výpočty na základě dat z www.finance.yahoo.com

V případě šikmosti, která je znatelně negativní (tj. zatímco výnosy jsou nízké a časté, ztráty se vyskytují výjimečně, ale jsou vysoké), nelze mezi jednotlivými obdobími pozorovat odlišnosti. Celkové období 12 let je pak specifické vysokou špičatostí, kterou je třeba dát do souvislosti s nestabilní volatilitou v dlouhodobém horizontu. Vybrané modely budeme ověřovat na každé sérii zvlášť i za celé období najednou (2004–2015), byť pro odhad parametrů modelů bude třeba využít i data z předcházejícího období. Údaje před rokem 2004 tak slouží pouze pro odhad parametrů modelů.

Tabulka 1 | Základní popisné statistiky log-výnosů indexu S&P 500

Období	Střední hodnota (%)	Směrodatná odchylka (%)	šikmost	špičatost
2004–2015	5,1	19,4	−0,33	14,45
2004–2007	6,6	12,1	−0,31	4,79
2008–2011	−3,5	28,7	−0,22	8,78
2012–2015	12,1	12,7	−0,26	4,89

Zdroj: vlastní výpočty na základě dat z www.finance.yahoo.com

3.1 Posuzované modely

V rámci studie budou porovnány čtyři odlišné modely vývoje náhodné veličiny X (finančního výnosu) v čase t, a to standardní předpoklad normálního rozdělení (*Gaussian innovations*, GI), pokročilý model Lévyho typu na bázi subordinátoru (*normal inverse Gaussian innovations*, NIG), semiparametrický model pro volatilitu výnosů typu AR(1)-GARCH(1,1) s přírůstky na bázi normálního rozdělení (AGG) a neparametrický model historické simulace (*historical simulation*, HS). Na základě těchto modelů pro vývoj logaritmických výnosů bude s využitím zvolené časové řady akciového indexu počítána míra rizika VaR, která bude dále zpětně testována.

Model, který zde označujeme jako GI, je standardním přístupem, předpokládajícím že logaritmické výnosy vykazují znaky normálního (Gaussova) rozdělení pravděpodobnosti. Primární stochastický proces je tedy postaven na Wienerově procesu se střední hodnotou nula a rozptylem jedna vykazujícím znaky normovaného normálního rozdělení s funkcí hustoty $f_N(x)$:

$$f_N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}. \tag{6}$$

Výhodou tohoto modelu je jednoduchý výpočet a dostupnost analytických formulí, nevýhodou pak značně zjednodušené předpoklady ohledně pravděpodobnostního rozdělení logaritmických výnosů (symetrické, bez dodatečné špičatosti).

Možností, jako tuto nevýhodu odstranit, je například aplikace některého z modelů Lévyho typu na bázi subordinátoru, viz např. Tichý (2010). Schopnost poměrně dobře vystihnout i šikmost a špičatost pozorovaných výnosů je na druhou stranu vykoupena znatelně složitějším výpočtem. V této studii využijeme model NIG (*normal inverse Gaussian model*), který umožňuje jednoduší aproximaci než sesterský model VG (*variance gamma model*).[3]

Model NIG lze v zásadě definovat dvěma způsoby. První je postaven na charakteristické funkci s parametry α, β a δ (přitom $\alpha > 0$, $-\alpha < \beta < \alpha$, α, $\delta > 0$):

$$\phi_{NIG}(x;\alpha,\beta,\delta) = \exp\left[-\delta\left(\sqrt{\alpha^2-(\beta+\imath x)^2}-\sqrt{\alpha^2-\beta^2}\right)\right]. \tag{7}$$

3 Pro obecná východiska Lévyho modelů viz např. Bertoin (1998); pro přehled těchto i dalších modelů viz např. Cont a Tankov (2004).

Z toho lze odvodit funkci hustoty takto:

$$f_{NIG}(x;\alpha,\beta,\delta)=\frac{\alpha\delta}{\pi}\exp\left(\delta\sqrt{\alpha^2-\beta^2}+\beta x\right)\frac{K_1\left(\alpha\sqrt{\delta^2-x^2}\right)}{\sqrt{\delta^2-x^2}}, \tag{8}$$

kde $K_\lambda(x)$ je modifikovaná Besselova funkce s indexem λ:

$$K_\lambda(x)=\frac{1}{2}\int_0^\infty y^{\lambda-1}\exp\left(-\frac{1}{2}x(y+y^{-1})\right)dy. \tag{9}$$

Alternativním způsobem je definice ve formě Brownova pohybu řízeného inverzním Gaussovým procesem (IG) takto:[4]

$$NIG\left(I(t;\nu);\theta,\vartheta\right)=\theta I_t+\vartheta Z(I_t)=\theta I_t+\vartheta\sqrt{I_t}\varepsilon\ . \tag{10}$$

Pak lze po úpravě $\theta=\frac{\alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}$, $\vartheta=\frac{\sqrt{\delta\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}}{\sqrt{\alpha-\beta}\sqrt{\alpha+\beta}}$ a $\nu=\left(\delta\sqrt{\alpha^2-\beta^2}\right)^{-1}$ přepsat funkci hustoty takto:

$$f_{NIG}(x;\theta,\vartheta,\nu)=\frac{\delta}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(\delta\sqrt{\alpha^2-\beta^2}\right)x^{-3/2}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\delta^2x^{-1}+(\alpha^2-\beta^2)x\right)\right). \tag{11}$$

Parametry modelu NIG lze z pozorovaných dat obecně získat buď na bázi maximalizace funkce věrohodnosti, nebo pomocí metody momentů. V tomto článku aplikujeme druhý postup, neboť je podstatně efektivnější z hlediska časové náročnosti. Nevýhodou modelu je, že pro kratší série pozorovaných dat může být empiricky pozorovaná špičatost příliš nízká (či dokonce mírně nižší než 3) a parametry modelu NIG pak nelze nalézt. V takových případech je úroveň špičatosti třeba uměle zvýšit – v této práci nastavujeme minimální úroveň špičatosti jako 3,01 + 5 ⁄ 3 *šikmost*^{2}.

Metoda historické simulace (HS) je postavena na zcela odlišných principech než oba výše uvedené parametrické postupy, neboť ve své základní podobě, kterou aplikujeme i zde, nevyžaduje žádný předpoklad ohledně pravděpodobnostního rozdělení modelované veličiny – je čistě neparametrická. Její název je odvozen ze skutečnosti, že vychází pouze z předchozích (tj. historických) pozorování náhodné veličiny (finančních výnosů) X. Míra rizika VaR pak je vypočtena jako odpovídající p-percentil z m předchozích pozorování. Kupříkladu máme-li k dispozici 100 minulých pozorování výnosů a je-li třeba určit VaR na hladině významnosti 5 %, pak je výsledkem 5. nejhorší výsledek ze všech předchozích pozorování (ovšem s opačným znaménkem).

V některých případech přirozeně může dojít k tomu, že daný percentil není přímo pozorovatelný (odhad VaR na nízké hladině významnosti z krátké časové řady) – pak aplikujeme extrapolaci s využitím dvou nejbližších hodnot. V některých minulých studiích, viz např. Berkowitz a O'Brien (2002), bylo ukázáno, že metoda historické simulace je preferovaným postupem pro odhad míry rizika na bázi VaR ve velkých (severoamerických) bankách, nicméně forma jejího použití je konzervativní a zpravidla vede k nadhodnocení kapitálového požadavku.

4 Jedná se o proces $I(t;\nu)$ s driftem ν, který v čase I z pravděpodobnostního rozdělení $IG[t;\nu]$ dosáhne úrovně t.

Poslední alternativou (AGG) pro modelování logaritmických výnosů X, kterou budeme posuzovat, je předpoklad jejich podmíněné střední hodnoty a podmíněného rozptylu ve smyslu modelu AR(1)-GARCH(1,1) s inovacemi na bázi normovaného normálního (Gaussova) rozdělení. Uvažujeme tedy, že logaritmické výnosy x_t lze v čase modelovat stochastickým procesem dle následující rovnice,

$$x_t = \mu_0 + \mu_1 x_{t-1} + \sigma_t \varepsilon_t, \tag{12}$$

kde μ_0 a μ_1 jsou parametry autoregresního procesu, σ_t představuje volatilitu a ε_t jsou rezidua, což je v podstatě proces bílého šumu – řada nezávislých a identicky rozdělených náhodných veličin s nulovou střední hodnotou a jednotkovým rozptylem (zde normované normální rozdělení). Volatilitu σ_t budeme modelovat pomocí modelu GARCH (Bollerslev, 1986), konkrétně modelu GARCH(1,1),

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \sigma_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 \varepsilon_{t-1}^2, \tag{13}$$

kde α_0, α_1 a β_1 jsou parametry, které je nutné odhadnout a pro které musí platit $\alpha_0 > 0$, $\alpha_1 \geq 0, \beta_1 \geq 0$ a $\alpha_1 + \beta_1 < 1$.

3.2 Odhadnuté VaR

Míru rizika Value at Risk (VaR) pro horizont jednoho dne postupně odhadujeme pro všechny čtyři výše uvedené modely (GI, NIG, HS, AGG), a to pomocí odhadu na bázi různých pohyblivých intervalů – uvažujeme celou řadu až 50 různých období od 21 dnů (jeden měsíc) až po 1 071 dnů (přibližně 4 roky) – pro 16 různých hladin významnosti: 0,15, 0,14, 0,13, 0,12, 0,11, 0,10, 0,09, 0,08, 0,07, 0,06, 0,05, 0,04, 0,03, 0,02, 0,01, 0,005. Pro vyhodnocení tak získáme až 4 × 50 × 16 různých variant – v rámci každé z nich je odhadnutá míra rizika porovnána s pozorovanou ztrátou v každém dni ze sledovaného období.

Z výsledků je zřejmé,[5] že (I) při vyšší 5% hladině významnosti dochází k mnohem častějšímu výskytu výjimek než u nižší 1% hladiny významnosti; (II) odhadnuté riziko je logicky výrazně vyšší pro 1% hladinu než pro 5% hladinu; (III) odhad rizika dle modelu GI je velmi podobný jako u modelu NIG u 5% hladiny, kdežto pro 1% hladinu je odhadnuté riziko znatelně nižší; (IV) historická simulace často ukazuje konstantní hodnoty rizika; (V) a konečně model AGG mnohdy riziko oproti ostatním modelům nadhodnocuje a odhad je celkově volatilnější.

4. Vyhodnocení efektivnosti

Pro komplexní posouzení vybraných modelů odhadu tržního rizika je využita metoda DEA ve formě modelu CCR, přičemž DMU jednotkami jsou varianty čtyř studovaných modelů s různými délkami intervalu pro odhad parametrů a vstupy jsou absolutní rozdíly mezi skutečně pozorovaným a předpokládaným počtem výjimek pro zvolených 16 hladin významnosti. Absolutním rozdílem máme na mysli to, že penalizujeme odchylku jak

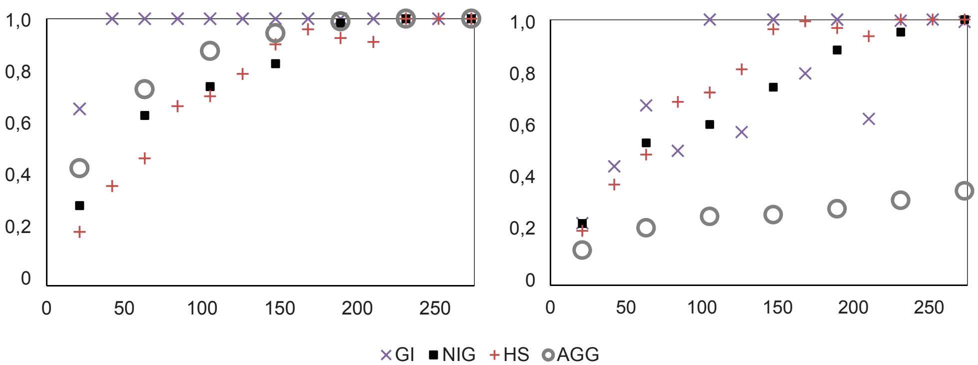
5 V popisu se zaměřujeme na hladiny významnosti 5 % a 1 %, ovšem obdobné závěry lze odvodit i při srovnání jiných hladin významnosti. Kompletní výsledky zde nejsou prezentovány s ohledem na rozsah časopisu a grafickou přehlednost. Grafické znázornění vybraných výsledků spolu s počty výjimek pro jednotlivé modely a periody odhadu lze nalézt na osobních stránkách prvního z autorů (https://sites.google.com/site/aleskresta/research/algorithms)

pozitivní (výjimek je více, kapitálu by byl nedostatek a hrozil by default), tak negativní (výjimek je méně, kapitálu je přebytek a finanční výkonnost by byla zbytečně snížena). Nižší počet výjimek je sice z určitého pohledu (např. regulatorní dohled, stabilita finančního sektoru) přijatelnější než jejich vyšší počet, nicméně při zde zvoleném přístupu komplexního hodnocení na celé řadě hladin významnosti odchylka na jedné hladině významnosti ovlivňuje odchylky na zbývajících hladinách. Při zaměření pozornosti pouze na pozitivní odchylky (výjimek je více, než se předpokládá) by byla významnou měrou snížena schopnost navrženého modelu odlišit kvalitní odhad pravděpodobnostního rozdělení od nekvalitního.

Implementace je provedena ve dvou krocích. Nejprve jsou zvolené čtyři modely (GI, NIG, HS, AGG) testovány samostatně na celém období (2004–2015), tj. je posouzeno, zda některý z uvažovaných intervalů odhadu parametrů dominuje ostatním (má vyšší skóre efektivnosti). Vybrané výsledky jsou zobrazeny v levé části obrázku 3 – pro každý z modelů je na ose y vyneseno skóre efektivnosti od nuly do jedničky (příslušné značky) v závislosti na zvoleném intervalu odhadu od 21 dnů (přibližně jeden měsíc) do 273 dnů (přibližně jeden rok). S ohledem na to, že výpočty u modelů NIG a AGG jsou časově podstatně náročnější,[6] byla jejich efektivnost studována s nižší hustotou intervalů pro odhad.

Z výsledků je zřejmé, že model GI je efektivní i pro krátké intervaly odhadu (2–3 měsíce), zatímco zbylé modely dosáhnou srovnatelných výsledků až s půlročním intervalem. Podíváme-li se blíže na integrovanou efektivnost, tj. modely jsou hodnoceny i mezi sebou navzájem, je zřejmé, že modely GI, NIG i HS lze považovat při vhodné volbě intervalu odhadu za efektivní. Oproti tomu neefektivnost modelu AGG je ve srovnání s ostatními modely jednoznačná. Tyto slabé výsledky modelu AGG lze dát do souvislosti s tím, že odhadované VaR pro AGG významně vzroste (či přímo vystřelí nahoru) bezprostředně po vyšší ztrátě a pak následuje významný propad, mnohdy i pro stabilnější hodnoty ostatních modelů. Původní ztrátu však již model nepostihne, a jelikož významné ztráty se (s výjimkou roku 2008) obvykle nevyskytují bezprostředně po sobě, dojde ke zbytečnému nadhodnocení rizika.

Obrázek 3 | Efektivnost modelů VaR v závislosti na intervalu odhadu nezávisle (vlevo) a integrovaně (vpravo)



Zdroj: vlastní výpočty

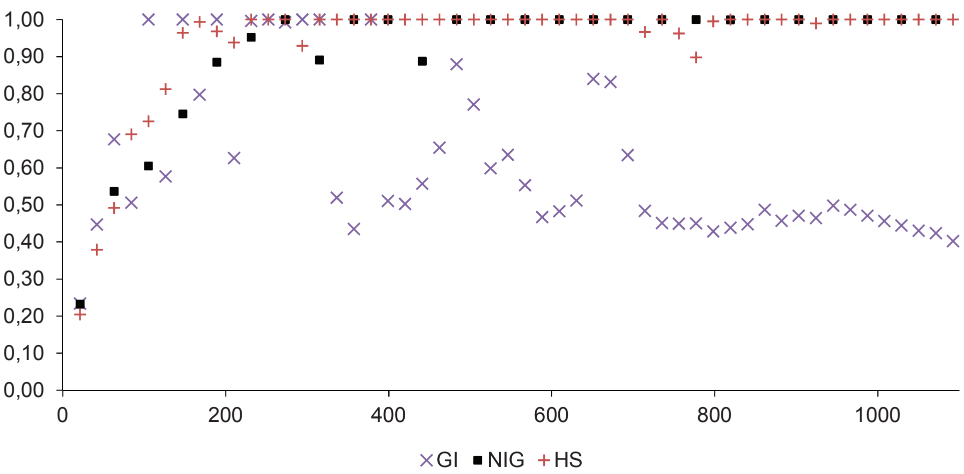
6 Zatímco odhad VaR dle GI i HS lze pro všechny hladiny významnosti najednou získat v řádu sekund, u modelu NIG se jedná o minuty a v případě AGG dokonce hodiny.

S ohledem na nízkou efektivnost a výpočetní náročnost modelu AGG budeme pro delší časové intervaly studovat již jen zbývající modely. Skóre integrované efektivnosti pro intervaly odhadu až do délky 4 let je zřejmé z obrázku 4. Z tohoto pohledu je zřejmé, že vhodné (efektivní) intervaly pro odhad parametrů modelů NIG a HS jsou jeden rok a výše. U modelu NIG je přitom lepší zvolit interval odhadu alespoň dva roky, neboť u kratších období se ztrácí jeho přednost – schopnost vystihnout třetí moment pravděpodobnostního rozdělení.

Zjednodušený přístup na bázi normálního rozdělení sice též poskytuje dobré výsledky (interval odhadu zejména okolo jednoho roku), nicméně ty nejsou stabilní a při určité kombinaci minulých pozorovaných hodnot může dojít k relativně vysokému nadhodnocení rizika (vyšší hodnoty *p*), respektive jeho podhodnocení (nízké hodnoty *p*). Při delších intervalech odhadu pak je model zcela neefektivní.

Je přitom zřejmé, že efektivnost je poměrně stabilní a nezávislá na intervalu odhadu – téměř jedna pro NIG a HS, okolo 0,5 pro GI. To může být dáno právě délkou studovaného období a jeho vnitřní heterogenitou, kdy mají odchylky relativně nízkou váhu.

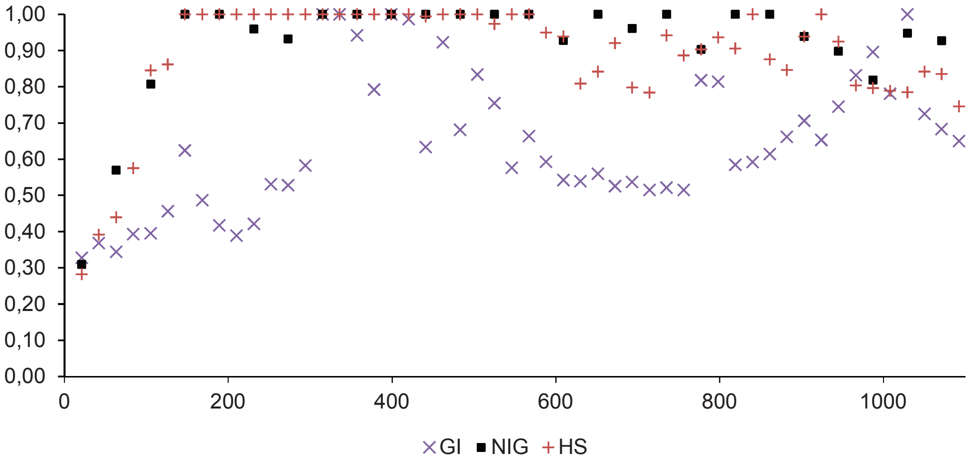
Obrázek 4 | Integrovaná efektivnost modelů VaR v závislosti na intervalu odhadu za období 2004–2015



Zdroj: vlastní výpočty

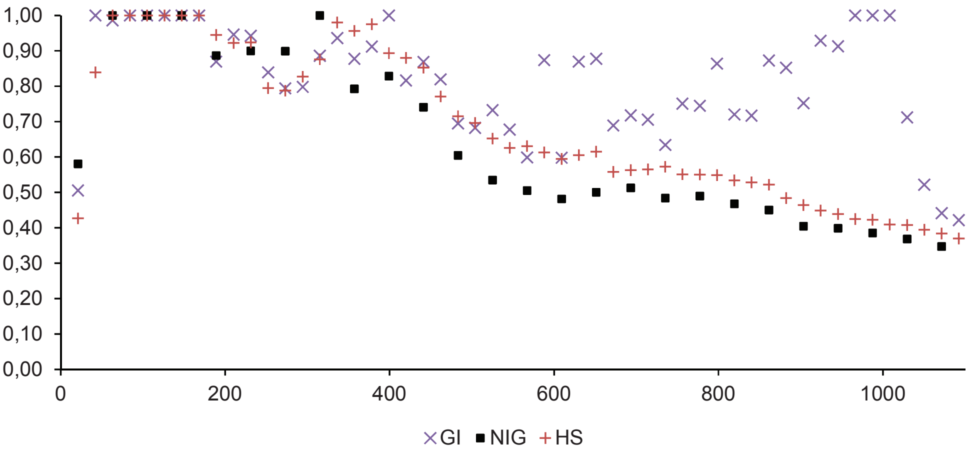
Zvolená databáze, jak je zřejmé z vývoje logaritmických výnosů na obrázku 2 a jejich statistických parametrů zachycených v tabulce 1, zahrnuje období „klidu“, které předcházelo bankovní krizi v roce 2008, poměrně velkou nestabilitu výnosů související právě s touto krizí, a nakonec i určité zklidnění cenových výkyvů. Tímto rozdělením získáme tři období se stejným počtem pozorování, ale s odlišným charakterem vývoje – *klid* (2004–2007), *krize* (2008–2011) a konečně *zklidnění* (2012–2015). Výsledky efektivnosti jsou nyní zachyceny v obrázku 5 (pro první období, *klid*), obrázku 6 (druhé období, *krize*) a obrázku 7 (třetí období, *zklidnění*), přičemž s modelem AGG již dále nepracujeme (ve vybraných intervalech se jeho koeficient efektivnosti pohyboval pouze mezi 0,2 a 0,3).

Obrázek 5 | Integrovaná efektivnost modelů VaR v závislosti na intervalu odhadu za období 2004–2007



Zdroj: vlastní výpočty

Obrázek 6 | Integrovaná efektivnost modelů VaR v závislosti na intervalu odhadu za období 2008–2011



Zdroj: vlastní výpočty

Co se týče předkrizového období *klidu* 2004–2007, je zřejmé, že model GI není vůbec vhodný pro komplexní odhad měr rizika, a to i přesto, že tato časová řada se nejvíce blížila normálnímu rozdělení – existují sice intervaly, které vedou k označení modelu jako efektivního, nicméně při drobné změně jeho délky je model vyhodnocen jako neefektivní, což indikuje vysokou citlivost na zvolenou datovou bázi. U modelů HS a NIG je situace znatelně lepší a jako efektivní délka odhadu se jeví jakýkoliv interval mezi 150 a 550 dny, byť výsledky pro HS jsou přeci jen stabilnější. Pro delší období (3 až 4 roky) vykazuje model

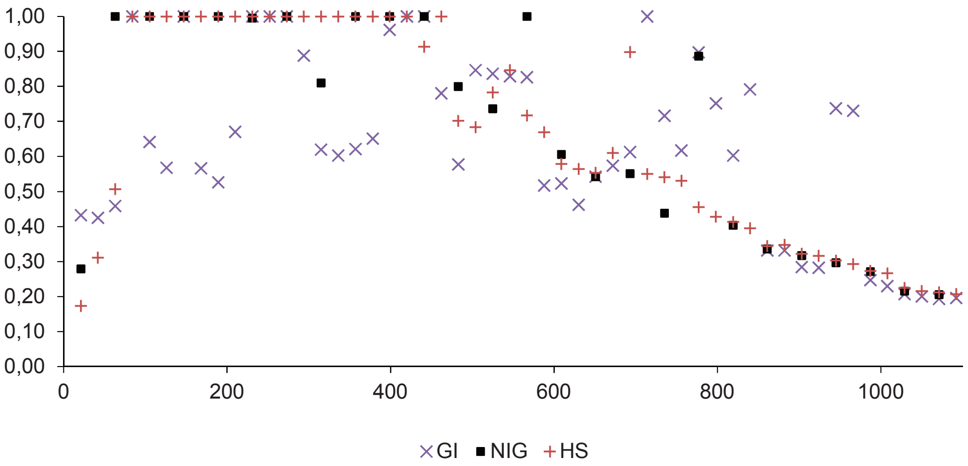
NIG lepší výsledky než model HS, nicméně jeho efektivita není stoprocentní. Na základě toho lze pro časové řady, které na první pohled působí stabilně, bez náhlých výkyvů doporučit modely HS či NIG s intervalem odhadu v délce jeden až dva roky.

V rámci období, které zahrnuje období *krize*, viz obrázek 6, je zjednodušující model GI opět vyhodnocen jako neefektivní pro většinu intervalů odhadu, byť koeficient efektivnosti je tentokrát vyšší. Co se týče modelu HS, tak ten nyní začíná být efektivní již pro poměrně krátké intervaly odhadu s tím, že efektivnost je stabilní pouze krátce a následně znatelně klesá. Podobně i modelu NIG stačí relativně kratší období pro dosažení efektivnosti, byť i ta s delším intervalem klesá. Důvodem může být skutečnost, že při delších intervalech odhadu je pro odhad parametrů využíváno ve velké míře i předkrizového období s relativně nízkou volatilitou a nízkou špičatostí. Proto je nyní obtížné říci, který z modelů by měl být upřednostněn. Je pouze zřejmé, že by měl být preferován kratší interval odhadu.

Konečně, výsledky pro *pokrizové* období (2012–2015), ve kterém došlo ke zklidnění situace, zachycuje obrázek 7. Výsledky jsou určitým způsobem podobné prvnímu období – model GI se ukazuje jako zcela nevhodný a modely HS a NIG jsou efektivní pro kratší až střední délku odhadu (nyní 63 až 450 dnů). Zásadním rozdílem oproti prvnímu období je u obou modelů skutečnost, že s intervalem odhadu rostoucím nad dva roky efektivnost klesá. Důvodem může být významné nadhodnocení rizika s ohledem na využití dat z předchozího (*krizového*) období.

Na základě výsledků pro různá časová období tak lze pro odhad komplexní míry rizika doporučit spíše model NIG než model HS (modely GI a AGG působí zcela nevyváženě), a to s intervalem pro odhad parametrů v délce jeden až dva roky.

Obrázek 7 | Integrovaná efektivnost modelů VaR v závislosti na intervalu odhadu za období 2012–2015



Zdroj: vlastní výpočty

Závěr

Vývoj na finančních trzích v posledních letech ukázal, že provázání kapitálového požadavku pouze na míru rizika VaR s jednou hladinou významnosti, která odpovídá záporné hodnotě příslušného percentilu pravděpodobnostního rozdělení výnosů, nemusí být dostatečné. Na druhou stranu komplexněji pojatá míra ES má složitější testování přesnosti. S ohledem na to byl v článku studován alternativní postup vyhodnocení různých modelů VaR pomocí obalové analýzy dat při komplexním posouzení celé řady hladin významnosti, od 15 % až po 0,5 %, za různých tržních podmínek. Jak vyplývá z definice míry ES, model, který se při takto komplexním posouzení na bázi VaR ukáže jako efektivní (stejný či lepší než ostatní posuzované modely), by měl vykazovat rovněž kvalitnější odhad míry ES. Vybraný model je samozřejmě dále nutné testovat standardními technikami, neboť *efektivnost* zde znamená pouze dominanci oproti ostatním studovaným modelům.

Z ilustrativních výsledků získaných aplikací zvolených modelů na různých časových řadách vývoje indexu akciového trhu v USA vyplývají některé závěry, které bylo třeba očekávat (nevhodnost normálního rozdělení), i jiné, kterým bude třeba věnovat hlubší pozornost v dalším výzkumu (slabé výsledky modelu AGG, označení historické simulace jako efektivní i pro krátký interval odhadu, nalezení modelu vhodného pro turbulentní období).

Důležitým poznatkem je též zjištění, že je nutné věnovat významnou pozornost volbě intervalu pro odhad parametrů modelů – pro efektivní odhad parametrů modelu se v běžných podmínkách jeví intervaly znatelně delší než jeden rok jako vhodnější, nicméně v pokrizovém období by neměly být výrazně delší (tj. spíše jeden až dva roky).

Taktéž nemůžeme doporučit testování modelů na velmi dlouhé časové řadě (obrázek 4), neboť může dojít ke zprůměrování chyb a snížení jejich významnosti, v důsledku čehož pak jako efektivní budou označeny i modely vedoucí k veskrze nekvalitním odhadům.

Lze konstatovat, že obalová analýza dat představuje zajímavý příspěvek ke komplexnímu posouzení modelů odhadu tržního rizika. Je přitom přirozené, že míra efektivnosti je odlišná, pokud jsou studována a navzájem porovnávána data v odlišných podmínkách. Nejinak by tomu bylo v případě méně efektivních trhů, než je akciový trh v USA.

Literatura

Alexander, C., Sheedy, E. (2008). Developing a stress Testing Framework Based on Market Risk Models. *Journal of Banking Finance*, 32(10), 2220–2236, https://doi.org/10.1016/j.jbankfin.2007.12.041

Amin, G. R., Toloo, M. (2004). A Polynomial-Time Algorithm for Finding Epsilon in DEA Models. *Computer and Operations Research*, 31(5), 803–805, https://doi.org/10.1016/s0305-0548(03)00072-8

Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J. M., Heath, D. (1999). Coherent Measures of Risk. *Mathematical Finance*, 9(3), 203–228.

BCBS (1998). *Amendment to the Capital Accord to Incorporate Market Risks.* January 1996, updated April 1998. Basel: Basel Committee on Banking Supervision, Bank for International Settlements.

BCBS (2013). *Fundamental Review of the Trading Book: A Revised Market Risk Framework*. Basel: Basel Committee on Banking Supervision, Bank for International Settlements.

Bertoin, J. (1998). *Lévy Processes*. Cambridge: Cambridge University Press. ISBN 978-0521646321.

Berkowitz, J., O'Brien, J. (2002). How Accurate are Value-at-risk Models at Commercial Banks? *Journal of Finance*, 57(3), 1093–1111, https://doi.org/10.1111/1540-6261.00455

Berkowitz, J., Christoffersen, P. F., Pelletier, D. (2011). Evaluating Value-at-Risk Models with Desk-level Data. *Management Science*, 57(12), 2213–2227, https://doi.org/10.1287/mnsc.1080.0964

Bollerslev, T. (1986). Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, 31(3), 307–327, https://doi.org/10.1016/0304-4076(86)90063-1

Brandolini, D., Golucci, S. (2012). Backtesting Value-at-risk: a Comparison Between Filtered Bootstrap and Historical Simulation. *Journal of Risk Model Validation*, 6(4): 3–16, https://doi.org/10.21314/jrmv.2012.094

Cont, R., Tankov, P. (2004). *Financial Modelling with Jump Processes*. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC press. ISBN 978-1584884132.

Du, Z., Escanciano, J. C. (2015). *Backtesting Expected Shortfall: Accounting for Tail Risk,* CAEPR Working Paper, Indiana University.

Emmer, S., Kratz, M., Tasche, D. (2015). What is the Best Risk Measure in Practice? A Comparison of Standard Measures. *Journal of Risk*, 18 (2), 31–60, https://doi.org/10.21314/jor.2015.318

Escanciano, J. C., Olmo, J. (2010). Backtesting Parametric Value-at-Risk with Estimation Risk. *Journal of Business & Economic Statistics*, 28(1), 36–51, https://doi.org/10.1198/jbes.2009.07063

Fama, E. F. (1965). The Behaviour of Stock Market Prices. *Journal of Business*, 38(1), 34–105.

Hull, J. C. (2013). *Risk Management and Financial Institutions*. 3rd ed. Chichester: Wiley. ISBN 978-1118269039.

Charnes, A., Cooper, W. (1962). Programming with Linear Fractional Functionals. *Naval Research Logistics Quarterly*, 9(3-4), 181–186, https://doi.org/10.1002/nav.3800090303

Charnes, A., Cooper, W., Rhodes, E. (1978). Measuring the Efficiency of Decision Making Units. *European Journal of Operational Research*, 2(6), 429–444, https://doi.org/10.1016/0377-2217(78)90138-8

Christoffersen, P. F. (1998). Evaluating Interval Forecasts. *International Economic Review*, 39(4), 841–862, https://doi.org/10.2307/2527341

Christoffersen, P. F., Pelletier, D. (2004). Backtesting Value-at-risk: A Duration-based Approach. *Journal of Financial Econometrics*, 2(1), 84–108, https://doi.org/10.1093/jjfinec/nbh004

Kinateder, H. (2016). Basel II versus III – A Comparative Assessment of Minimum Capital Requirements for Internal Model Approaches. *Journal of Risk*, 18(3), 25–45, https://doi.org/10.21314/j0r.2016.325

Kresta, A., Tichý, T. (2012). International equity portfolio risk modeling: The case of NIG model and ordinary copula functions. *Finance a úvěr – Czech Journal of Economics and Finance*, 61(2), 141–151.

Kresta, A., Tichý, T. (2016). Selection of Efficient Market Risk Models: Backtesting Results Evaluation with DEA Approach. *Computers & Industrial Engineering*, 102, 331-339, https://doi.org/10.1016/j.cie.2016.07.017

Kupiec, P. (1995). Techniques for Verifying the Accuracy of Risk Management Models. *Journal of Derivatives*, 3(2), 73–84, https://doi.org/10.3905/jod.1995.407942

Leccadito, A., Boffelli, S., Urga, G. (2014). Evaluating the Accuracy of Value-at-risk Forecasts: New Multilevel Tests. *International Journal of Forecasting*, 30(2), 206–216, https://doi.org/10.1016/j.ijforecast.2013.07.014

Mandelbrot, B. (1963). The Variation of Certain Speculative Prices. *Journal of Business*, 36(4), 394–419, https://doi.org/10.1086/294632

Mandelbrot, B. (1967). The Variation of Some Other Speculative Prices. *Journal of Business*, 40(4), 393–413, https://doi.org/10.1086/295006

Mandelbrot, B., Taylor, M. (1967). On the Distribution of Stock Price Differences. *Operations Research*, 15(6), 1057–1062, https://doi.org/10.1287/opre.15.6.1057

Pérignon D., Smith, R. (2010). The Level and Quality of Value-at-Risk Disclosure by Commercial Banks. *Journal of Banking & Finance*, 34(2), 362–377, https://doi.org/10.1016/j.jbankfin.2009.08.009

Rank, J. (2007). *Copulas. From Theory to Application in Finance*. London: Risk books. ISBN 978-1904339458.

Resti, A., Sironi, A. (2007). *Risk Management and Shareholders' Value in Banking: From Risk Measurement Models to Capital Allocation Policies*. Chichester: Wiley. ISBN 978-0470029787.

Rockafellar, R. T., Uryasev, S. (2002). Conditional Value-at-Risk for General Loss Distributions. *Journal of Banking and Finance*, 26(7), 1443–1471, https://doi.org/10.1016/s0378-4266(02)00271-6

Tichý, T. (2010). Posouzení odhadu měnového rizika portfolia pomocí Lévyho modelů. *Politická ekonomie*, 58 (4), 504–521, https://doi.org/10.18267/j.polek.744

Wong, W. K. (2010). Backtesting Value-at-risk Based on Tail Losses. *Journal of Empirical Finance*, 17(3), 526–538, https://doi.org/10.1016/j.jempfin.2009.11.004