

Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava  
Fakulta elektrotechniky a informatiky  
Katedra aplikované matematiky

# **Matice se známou inverzí**

## Matrices with known inverses

2013

Nikola Plívová

## Zadání bakalářské práce

Student: **Nikola Plívová**

Studijní program: B2647 Informační a komunikační technologie

Studijní obor: 1103R031 Výpočetní matematika

Téma: **Matice se známou inverzí**  
**Matrices with known inverses**

Zásady pro vypracování:

Jednou ze základních úloh lineární algebry je výpočet inverzní matice, který lze provést pomocí celé řady algoritmů. Pro některé matice je však inverze známá předem a to tak, že její prvky lze vyjádřit pomocí jednoduchých vzorců. Tyto matice je možno použít pro testování přesnosti zmíněných algoritmů.

Osnova práce:

- inverzní matice a algoritmy jejího výpočtu
- matice se známou inverzí
- použití matic se známou inverzí

Seznam doporučené odborné literatury:

- [1] Z. Dostál, V. Vondrák: Lineární algebra. Skriptum VŠB-TU Ostrava, 2011.
- [2] E. Kilic, P. Stanica: The Lehmer matrix and its recursive analogue. JCMC 74(2010), 193-205.

Formální náležitosti a rozsah bakalářské práce stanoví pokyny pro vypracování zveřejněné na webových stránkách fakulty.

Vedoucí bakalářské práce: **doc. RNDr. Radek Kučera, Ph.D.**

Datum zadání: 16.11.2012

Datum odevzdání: 07.05.2013



doc. RNDr. Jiří Bouchala, Ph.D.  
*vedoucí katedry*



prof. RNDr. Václav Snášel, CSc.  
*děkan fakulty*

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracovala samostatně. Uvedla jsem všechny literární prameny a publikace, ze kterých jsem čerpala.

V Orlové dne 3.května 2013

*Orlová*  
.....

Ráda bych na tomto místě poděkovala doc. RNDr. Radku Kučerovi, Ph.D. za odborné, trpělivé a svědomité vedení mé práce a za věnování svého času.  
Dále bych velmi ráda poděkovala své rodině a přátelům za především morální podporu a v neposlední řadě i svému příteli za veškerou pomoc a trpělivost.

### Abstrakt

Tato práce se zabývá maticemi se známou inverzí. Jsou to speciální typy matic, pro jejichž výpočet inverze využijeme explicitně známých vzorců. Lze předpokládat, že takto získaná inverzní matice je exaktnější, čehož využijeme při testování přesnosti výpočtů v programu MATLAB. Pro jednotlivé matice si získané hodnoty zapíšeme do tabulek a zkoumáme odlišnosti. Sledujeme také příčiny nepřesných výpočtů, které souvisí s reprezentací čísel v počítači.

**Klíčová slova:** matice, inverzní matice, MATLAB

### Abstract

This thesis deals with matrices with known inverses. These are special types of matrices, of which inverses we will compute by explicitly known formulas. It can be assumed, that inverse obtained in this way is more accurate. We will use them for testing the accuracy of calculation in MATLAB. We will write down obtained values in the table for every matrix. We will also observe the causes of inaccurate computation, which are associated with computer representation of number.

**Keywords:** matrix, matrix inverse, MATLAB

**Seznam použitých zkratek a symbolů**

|                           |   |                             |
|---------------------------|---|-----------------------------|
| $A$                       | - | Matice                      |
| $A^{-1}$                  | - | Inverzní matice             |
| $I$                       | - | Jednotková matice           |
| $M_{ij}^A$                | - | Minor matice                |
| $\mathbb{R}^{m \times n}$ | - | Množina $m \times n$ matic  |
| $\mathbb{R}^m$            | - | Množina sloupcových vektorů |
| $\det(A)$                 | - | Determinant matice $A$      |
| $r_i^A$                   | - | $i$ -tý řádek matice $A$    |
| $s_j^A$                   | - | $j$ -tý sloupec matice $A$  |
| $\prod$                   | - | Součin                      |
| $\sum$                    | - | Suma                        |
| $\delta(\tilde{x})$       | - | Odhad relativní chyby       |
| $\varepsilon(\tilde{x})$  | - | Odhad absolutní chyby       |
| $\kappa(A)$               | - | Číslo podmíněnosti matice   |
| $\ \cdot\ $               | - | Eukleidovská norma vektoru  |

# Obsah

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>Úvod</b>  | <b>1</b>  |
| <b>2</b> | <b>Matice a jejich vlastnosti</b>                              | <b>2</b>  |
| 2.1      | Matice . . . . .   | 2         |
| 2.1.1    | Definice . . . . .   | 2         |
| 2.2      | Minor matice . . . . .   | 3         |
| 2.3      | Determinant matice . . . . .                                   | 3         |
| 2.4      | Inverzní matice . . . . .                                      | 4         |
| 2.4.1    | Výpočet inverzní matice Gaussovou eliminační metodou . . . . . | 4         |
| 2.5      | LU rozklad . . . . .   | 6         |
| 2.5.1    | Trojúhelníkové matice . . . . .                                | 6         |
| 2.5.2    | Výpočet LU rozkladu . . . . .                                  | 7         |
| 2.6      | Podmíněnost matice . . . . .                                   | 8         |
| 2.6.1    | Norma vektoru . . . . .  | 8         |
| 2.6.2    | Norma matice . . . . .   | 8         |
| 2.6.3    | Číslo podmíněnosti matice . . . . .                            | 8         |
| 2.6.4    | Dobře podmíněný systém . . . . .                               | 9         |
| 2.6.5    | Špatně podmíněný systém . . . . .                              | 9         |
| <b>3</b> | <b>Matice se známou inverzí</b>                                | <b>10</b> |
| 3.1      | Lehmerova matice . . . . .                                     | 10        |
| 3.1.1    | Definice . . . . .   | 10        |
| 3.1.2    | LU rozklad . . . . .   | 11        |
| 3.1.3    | Inverze . . . . .  | 12        |
| 3.1.4    | Konkrétní příklad . . . . .                                    | 14        |
| 3.1.5    | Ukázka implementace v MATLABu . . . . .                        | 15        |
| 3.2      | Pascalova matice . . . . .                                     | 16        |
| 3.2.1    | Definice . . . . .   | 16        |
| 3.2.2    | Typy Pascalových matic a vztahy mezi nimi . . . . .            | 16        |
| 3.2.3    | Inverzní matice . . . . .                                      | 16        |
| 3.2.4    | Konkrétní příklad . . . . .                                    | 17        |
| 3.2.5    | Ukázka implementace v MATLABu . . . . .                        | 17        |
| 3.3      | Cauchyova matice . . . . .                                     | 18        |

---

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| 3.3.1    | Definice . . . . .                                      | 18        |
| 3.3.2    | Inverzní matice . . . . .                               | 18        |
| 3.3.3    | Konkrétní příklad . . . . .                             | 19        |
| 3.3.4    | Ukázka implementace v MATLABu . . . . .                 | 19        |
| 3.4      | Hilbertova matice . . . . .                             | 20        |
| 3.4.1    | Definice . . . . .                                      | 20        |
| 3.4.2    | Inverzní matice . . . . .                               | 20        |
| 3.4.3    | Konkrétní příklad . . . . .                             | 20        |
| 3.4.4    | Ukázka implementace v MATLABu . . . . .                 | 20        |
| 3.5      | Vandermondova matice . . . . .                          | 21        |
| 3.5.1    | Definice . . . . .                                      | 21        |
| 3.5.2    | Inverzní matice . . . . .                               | 21        |
| 3.5.3    | Konkrétní příklad . . . . .                             | 22        |
| 3.5.4    | Ukázka implementace v MATLABu . . . . .                 | 23        |
| <b>4</b> | <b>Testování a nepřesnosti při počítání</b>             | <b>24</b> |
| 4.1      | Čísla s plovoucí řadovou čárkou . . . . .               | 24        |
| 4.1.1    | Obecné vyjádření . . . . .                              | 24        |
| 4.1.2    | IEEE standard . . . . .                                 | 25        |
| 4.1.3    | Strojové epsilon . . . . .                              | 25        |
| 4.2      | Chyby . . . . .   | 26        |
| 4.2.1    | Zaokrouhlovací chyby . . . . .                          | 26        |
| 4.3      | Testy . . . . .   | 27        |
| 4.3.1    | Testování Lehmerovy matice . . . . .                    | 27        |
| 4.3.2    | Testování Pascalových matic . . . . .                   | 28        |
| 4.3.3    | Testování Cauchyovy matice . . . . .                    | 30        |
| 4.3.4    | Testování Hilbertovy matice . . . . .                   | 31        |
| 4.3.5    | Testování Vandermondovy matice . . . . .                | 32        |
| <b>5</b> | <b>Závěr</b>  | <b>33</b> |
|          | <b>Seznam použité literatury a internetových odkazů</b> | <b>34</b> |
|          | <b>Přílohy</b>  | <b>36</b> |



# Seznam tabulek

|     |  |    |
|-----|--|----|
| 4.1 | Výsledky testů Lehmerovy matice . . . . .                      | 27 |
| 4.2 | Výsledky testů Pascalovy dolní trojúhelníkové matice . . . . . | 28 |
| 4.3 | Výsledky testů Pascalovy symetrické matice . . . . .           | 29 |
| 4.4 | Výsledky testů Cauchyovy matice . . . . .                      | 30 |
| 4.5 | Výsledky testů Hilbertovy matice . . . . .                     | 31 |
| 4.6 | Výsledky testů Vandermondovy matice . . . . .                  | 32 |

# Seznam obrázků

|     |   |    |
|-----|---|----|
| 2.1 | Dopředná redukce. [3]                   | 5  |
| 4.1 | Reprezentace čísla podle IEEE standardu | 25 |

# Seznam výpisů zdrojového kódu

|     |  |    |
|-----|--|----|
| 3.1 | Algoritmus pro výpočet inverze Lehmerovy matice . . . . .  | 15 |
| 3.2 | Algoritmus pro výpočet inverze Pascalovy dolní trojúhelníkové matice a symetrické matice . . . . . | 17 |
| 3.3 | Algoritmus pro výpočet inverze Cauchyovy matice . . . . .  | 19 |
| 3.4 | Algoritmus pro výpočet inverze Hilbertovy matice . . . . .   | 20 |
| 3.5 | Algoritmus pro výpočet inverze Vandermondovy matice . . . . .                                      | 23 |

# Kapitola 1

## Úvod

Jedním ze základních problémů lineární algebry je výpočet inverzní matice, která musí splňovat podmínku

$$AA^{-1} = I,$$

kde  $A^{-1}$  je zmíněná inverzní matice k matici  $A$  a  $I$  je matice jednotková. Matice se známou inverzí jsou typem matic, pro které získáme předem známou inverzi tak, že její jednotlivé prvky lze vyjádřit pomocí jednoduchých vzorců.

V bakalářské práci se nejprve seznámíme s několika základními pojmy, jež běžně v lineární algebře používáme. Uvedeme definici matice a popíšeme její vlastnosti, které budou mít vliv na následné testování přesnosti výpočtu. Přiblížíme si problematiku Gaussovy eliminační metody a LU rozkladu, z nichž vychází některé algoritmy pro výpočet inverzní matice.

Dále se budeme zabývat zmíněnými speciálními typy matic a pro každou z nich si uvedeme definici, princip výpočtu prvků inverzní matice a také přidáme ukázky zdrojového kódu, který jsme implementovali v programu MATLAB.

Pokud chceme získat inverzi k maticím, pro které není explicitně známa, využijeme několika algoritmů, které tuto úlohu řeší. V testech pak srovnáme přesnost výpočtu inverzní matice, ke kterému použijeme již zmíněné algoritmy, s explicitně známou inverzí speciálních typů matic. Věnovat se budeme také tomu, jaký vliv má počítačová aritmetika na chyby výpočtu.

V příloze pak budou obsaženy veškeré funkce, vytvořené v programu MATLAB a xlsx soubor s výsledky všech testů.

## Kapitola 2

# Matice a jejich vlastnosti

V první kapitole si přiblížíme pojmy, s nimiž se budeme setkávat v celé bakalářské práci. Jedním z nich je pojem matice, pro kterou si uvedeme definici, základní předpis a princip výpočtu matice inverzní. Pro výpočet inverzní matice použijeme Gaussovu eliminační metodu, jejíž postup je v této kapitole vysvětlen a ilustrován na konkrétním jednoduchém příkladu. Část kapitoly věnujeme LU rozkladu matice, jeho definici a ukážeme výpočtu horní a dolní trojúhelníkové matice. Nadále se budeme zabývat vlastnostmi matic, mezi které patří například číslo podmíněnosti, pro jehož výpočet potřebujeme využít normy vektoru a matice.

Podkladem pro tvorbu této kapitoly byly materiály [1], [3], [4] a [10], ze kterých vycházejí některé použité věty, definice a důkazy.

## 2.1 Matice

### 2.1.1 Definice

Mějme dány reálná čísla  $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn}$ . Matici typu  $m \times n$  rozumíme následující tabulku

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad (2.1)$$

kde jsou jednotlivé prvky uspořádány do  $m$  řádků  $r_i^A$  a  $n$  sloupců  $s_j^A$ .

Je možné zapsat

$$A = \begin{bmatrix} r_1^A \\ \vdots \\ r_m^A \end{bmatrix} = [s_1^A \quad \cdots \quad s_n^A], \quad (2.2)$$

kde

$$r_i^A = [a_{i1} \quad \cdots \quad a_{in}], \quad s_j^A = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

Lze též užít stručnějšího zápisu  $A = [a_{ij}]$ .

Množinu všech  $m \times n$  matic označujeme  $\mathbb{R}^{m \times n}$ . Je-li  $m = n$ , pak matici  $A$  nazýváme **čtvercovou maticí** řádu  $n$ .

Jako **řádkový vektor** označujeme matici typu  $1 \times n$  a **sloupcovým vektorem** rozumíme matici typu  $m \times 1$ . Množinu sloupcových vektorů označujeme  $\mathbb{R}^m$ . Spolu se sloupci a řádky matice  $A$  tvoří její význačnou část i **diagonála**, která je tvořena prvky  $a_{11}, \dots, a_{ss}$ , kde  $s = \min\{m, n\}$ .

## 2.2 Minor matice

Minorem matice  $A$  nazýváme matici typu  $n - 1 \times n - 1$ , kterou získáme vyškrtnutím  $i$ -tého řádku a  $j$ -tého sloupce. Značíme jej  $M_{ij}^A$ .

**Ukázkový příklad**

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad M_{22}^A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$

## 2.3 Determinant matice

**Definice 2.3.1.** Mějme matici  $A$  s prvky  $a_{ij}$  typu  $n \times n$ , jejíž prvky jsou reálná nebo komplexní čísla. Determinant matice  $A$  (značíme  $\det(A)$ ) rozumíme číslo, které získáme následovně:

- Pro  $n = 1$  platí  $\det(A) = \det[a_{11}] = a_{11}$ ;
- Je-li  $n > 1$ , pak determinant spočítáme takto

$$\det(A) = a_{11} \det(M_{11}^A) - a_{12} \det(M_{12}^A) + a_{13} \det(M_{13}^A) - \cdots + (-1)^{n+1} a_{1n} \det(M_{1n}^A). \quad (2.5)$$

## Ukázkový příklad

$$\det(A) = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -1 \cdot \det \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 2 \cdot \det \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 2 \cdot \det \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3. \quad (2.6)$$

## 2.4 Inverzní matice

**Definice 2.4.1.** Nechť je dána čtvercová matice  $A$ . Existuje-li matice  $B$  taková, že platí

$$AB = BA = I, \quad (2.7)$$

pak matici  $B$  nazýváme **inverzní maticí** k matici  $A$ . Každou matici, ke které lze nalézt příslušnou inverzní matici, nazýváme **regulární**. V opačném případě ji nazýváme **singulární**.

**Věta 2.4.2.** Ke každé matici  $A$ , která je regulární, existuje právě jedna matice inverzní

**Důkaz.** Mějme regulární matici  $A$  a k ní inverzní matice  $B_1$  a  $B_2$ , pak platí

$$AB_1 = I \text{ a } AB_2 = I. \quad (2.8)$$

Vynásobíme-li první rovnici maticí  $B_2$  zleva a druhou rovnici maticí  $B_1$  zprava, získáme vztah

$$B_2 = B_2AB_1 = B_1. \quad (2.9)$$

□

Inverzní matici k matici  $A$  označujeme  $A^{-1}$ .

## 2.4.1 Výpočet inverzní matice Gaussovou eliminační metodou

Gaussovou eliminační metodou řešíme soustavy lineárních rovnic. Je také základem několika algoritmů pro výpočet inverzní matice v programu MATLAB po zadání příkazu `inv`. Gaussovou eliminační metodu si popíšeme na řešení soustavy  $n$  rovnic o  $n$  neznámých. Zabýváme se tedy soustavou

$$Ax = b, \quad (2.10)$$

kde  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $b \in \mathbb{R}^n$ .

Tuto soustavu lze také zapsat v následujícím tvaru

$$\begin{array}{cccccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 & & & \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 & & & \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n & = & b_n, & & & \end{array} \quad (2.11)$$

kde  $a_{ij}$  jsou koeficienty soustavy a  $b_i$  pravé strany. Pokud chceme najít řešení takto zadané soustavy rovnic, pak musíme nejprve soustavu  $Ax = b$  převést pomocí ekvivalentních úprav na soustavu  $Ux = y$ , která je ekvivalentní s původní soustavou a kde  $U$  je horní trojúhelníková matice (2.5.1).

**Definice 2.4.3.** Následující úpravy soustavy rovnic nazýváme ekvivalentními:

- Vzájemné prohození dvou rovnic dané soustavy;
- Vynásobení obou stran nějaké rovnice nenulovým číslem;
- Přičtení nenulového násobku jedné rovnice dané soustavy k rovnici jiné.

Soustavu lineárních rovnic nemusíme zapisovat pouze výše zmíněnými způsoby, ale je možné ji vyjádřit také pomocí rozšířené matice soustavy, kde každou rovnici reprezentuje jeden řádek matice. Takto zapsaná soustava má tvar

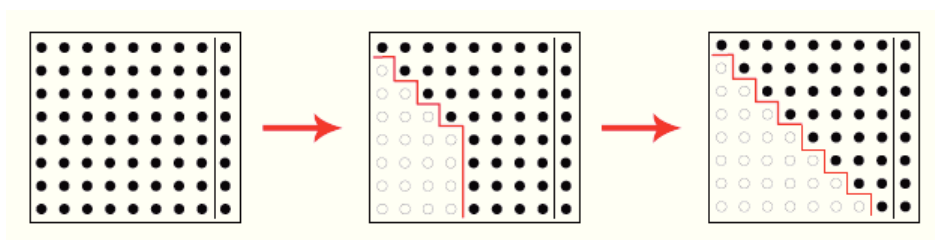
$$[A|b] = \left[ \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ & \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right]. \quad (2.12)$$

Upravujeme-li rozšířenou matici soustavy, pak nevyužíváme ekvivalentních úprav, nýbrž elementárních řádkových operací.

**Definice 2.4.4.** Elementárními řádkovými operacemi rozumíme:

- Vzájemné prohození dvou řádků matice;
- Vynásobení jakéhokoliv řádku matice číslem;
- Přičtení nenulového násobku jakéhokoliv řádku matice k řádku jinému.

Máme-li pro danou soustavu lineárních rovnic sestavenou rozšířenou matici soustavy, pak se snažíme pomocí elementárních řádkových úprav celou matici převést na schodový tvar. Tomuto postupu se říká *dopředná redukce*, je znázorněn na následujícím obrázku.



Obrázek 2.1: Dopředná redukce. [3]



Pokud jsme matici převedli na schodový tvar, pak je již jednoduché dopočítat řešení soustavy pomocí procesu, kterému říkáme *zpětná substituce*.

### Vlastní výpočet inverze

Mějme čtvercovou regulární matici  $A$ , ke které chceme nalézt inverzní matici  $A^{-1}$ . Výpočet provedeme tak, že si sestavíme rozšířenou matici  $(A|I)$ , kterou pomocí znalosti dopředné redukce převedeme na schodový tvar a následně se snažíme zpětnou substitucí získat z takto upravené matice matici tvaru  $(I|A^{-1})$ . Celý tento proces nazýváme Gauss-Jordanovou metodou.

Pro lepší vysvětlení uvádíme následující jednoduchý příklad:

$$\begin{aligned} [A|I] &= \left[ \begin{array}{cc|cc} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} r_2 - \frac{1}{3}r_1 \\ \frac{1}{3}r_1 \end{array} \mapsto \left[ \begin{array}{cc|cc} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{8}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} r_1 - \frac{3}{8}r_2 \\ \frac{3}{8}r_2 \end{array} \mapsto \\ \mapsto \left[ \begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & \frac{9}{8} & -\frac{3}{8} \\ 0 & \frac{8}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} \frac{1}{3}r_1 \\ \frac{3}{8}r_2 \end{array} \mapsto \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} \end{array} \right] = [I|A^{-1}]. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Gauss-Jordanovou metodou jsme spočítali inverzní matici

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} \end{bmatrix}. \quad (2.14)$$

Správnost výpočtu lze jednoduše ověřit podle vztahu  $AA^{-1} = I$ . Skutečně platí

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I. \quad (2.15)$$

## 2.5 LU rozklad

### 2.5.1 Trojúhelníkové matice

Máme-li čtvercovou matici  $L$ , pro jejíž prvky  $l_{ij}$  platí

$$l_{ij} = 0 \text{ pro } i < j, \quad (2.16)$$

pak ji nazýváme dolní trojúhelníkovou maticí.

Uvažujme čtvercovou matici  $U$ . Pokud pro její prvky  $u_{ij}$  platí

$$u_{ij} = 0 \text{ pro } j < i, \quad (2.17)$$

pak matici  $U$  nazveme horní trojúhelníkovou.

### 2.5.2 Výpočet LU rozkladu

Mějme regulární čtvercovou matici  $A$ . Rozkladem matice  $A$  rozumíme dolní trojúhelníkovou matici  $L$  a horní trojúhelníkovou matici  $U$  tak, aby platilo

$$A = LU. \quad (2.18)$$

Výpočet dolní trojúhelníkové matice  $L$  a horní trojúhelníkové matice  $U$  provedeme tak, že upravíme matici  $[A|I]$  podobným způsobem, jako jsme si ukázali v části (2.4.1), avšak bez použití výměny řádků, na matici  $[U|\tilde{L}]$ . Matici  $L$  pak získáme inverzí matice  $\tilde{L}$ .

Ke snadnějšímu porozumění uvádíme jednoduchý příklad:

$$\begin{aligned} [A|I] &= \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} r_2 - 3r_1 \\ r_3 - 2r_1 \end{array} \mapsto \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -7 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -5 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ r_3 - r_2 \end{array} \mapsto \\ \mapsto \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -7 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right] &= [U|\tilde{L}], \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} [\tilde{L}|I] &= \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} r_2 + 3r_1 \\ r_3 - r_1 \end{array} \mapsto \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ r_3 + r_2 \end{array} \mapsto \\ \mapsto \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right] &= [I|L]. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Spočítali jsme tedy obě matice

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -7 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}. \quad (2.21)$$

Pro ověření dosadíme do rovnice  $A = LU$  a vidíme, že platí

$$LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -7 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = A. \quad (2.22)$$

## 2.6 Podmíněnost matice

Podmíněnost matice  $A$  lze určit podle čísla podmíněnosti  $\kappa(A)$ . Pro jeho zavedení si musíme definovat pojmy norma vektoru a norma matice.

### 2.6.1 Norma vektoru

Zobrazení  $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$  nazýváme normou vektoru, má-li následující vlastnosti:

- $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$  pro  $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ ;
- $\|kx\| = |k| \cdot \|x\|$  pro  $\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall k \in \mathbb{R}$ ;
- $\|x\| \geq 0$ , kde  $\|x\| = 0$  právě tehdy, když  $x$  je nulový vektor.

Nejběžněji používaná je tzv. Eukleidovská norma, která je dána předpisem

$$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}. \quad (2.23)$$

### 2.6.2 Norma matice

Mějme čtvercovou matici  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  a nenulový vektor  $x \in \mathbb{R}^n$ . Je zřejmé, že výsledkem součinu  $Ax$  je také vektor o  $n$  složkách. Pro normy vektorů  $\|x\|$  a  $\|Ax\|$  platí

$$\|Ax\| \leq c \cdot \|x\|, \quad (2.24)$$

kde  $c$  je nezáporná konstanta.

Pro  $\|x\| > 0$  a můžeme tuto nerovnost upravit na tvar

$$\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq c. \quad (2.25)$$

Normou matice  $A$  nazveme nejmenší možné číslo  $c$ , které splňuje poslední nerovnost a budeme ji označovat  $\|A\|$ . Platí

$$\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|. \quad (2.26)$$

### 2.6.3 Číslo podmíněnosti matice

Číslo podmíněnosti  $\kappa(A)$  regulární matice  $A$  je definováno následovně

$$\kappa(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|. \quad (2.27)$$

Soustavu rovnic, jejíž číslo podmíněnosti  $\kappa(A)$  má malou hodnotu, považujeme za dobře podmíněnou. V opačném případě, kdy číslo podmíněnosti  $\kappa(A)$  nabývá velkých hodnot, je soustava podmíněna špatně.

Pokud chceme zjistit číslo podmíněnosti matice v MATLABu, pak použijeme příkaz `cond`.

**Věta 2.6.1.** [10] Nechť  $A$  je regulární čtvercová matice řádu  $n$  a nechť  $b$  a  $x$  jsou nenulové  $n$ -složkové vektory takové, že platí

$$Ax = b. \quad (2.28)$$

Dále nechť  $\tilde{b}$  a  $\tilde{x}$  jsou  $n$ -složkové vektory takové, že platí

$$A\tilde{x} = \tilde{b}. \quad (2.29)$$

Potom

$$\frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|} \leq \kappa(A) \frac{\|b - \tilde{b}\|}{\|b\|}. \quad (2.30)$$

**Poznámka.** V následujícím důkazu využijeme vztahu

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|, \quad (2.31)$$

kde  $A$  je matice typu  $m \times n$  a  $B$  matice typu  $n \times p$ .

**Důkaz.** Zřejmě platí

$$b = Ax \quad \text{resp.} \quad x - \tilde{x} = A^{-1}(b - \tilde{b}) \quad (2.32)$$

a pomoci (2.31) odtud dostaneme

$$\|x\|^{-1} \leq \|A\| \|b\|^{-1} \quad \text{resp.} \quad \|x - \tilde{x}\| = \|A^{-1}\| \|b - \tilde{b}\|. \quad (2.33)$$

Vynásobením těchto nerovností vznikne tvrzení (2.30).  $\square$

### 2.6.4 Dobře podmíněný systém

Problém se nazývá dobře podmíněný právě tehdy, když malá změna ve vstupních datech způsobí malou změnu ve výsledku.

Lze ukázat, že soustava lineárních rovnic  $Ax = b$  je dobře podmíněná, pokud prvky na hlavní diagonále matice  $A$  dominují (tzn. v absolutní hodnotě jsou větší než ostatní prvky příslušného řádku či sloupce).

Pro matici  $A$  a její matici  $A^{-1}$  platí, že jsou dobře podmíněné, jsou-li jejich v absolutní hodnotě maximální prvky přibližně stejné.

### 2.6.5 Špatně podmíněný systém

Problém nazveme špatně podmíněný, způsobí-li malá změna na vstupních datech velkou změnu v datech výstupních.

Pokud je soustava rovnic špatně podmíněná, pak v absolutní hodnotě maximální prvky matice  $A$  a inverzní matice  $A^{-1}$  jsou odlišné dokonce i o několik řádů.

## Kapitola 3

# Matice se známou inverzí

Náplní následující kapitoly jsou speciální typy matic, u kterých je předpis pro výpočet inverze znám. Všechny vzorce, ať už pro samotnou matici či pro výpočet inverzní matice, jsou jednoduché a lze je snadno popsat algoritmem, který využijeme pro testování přesnosti výpočtů. V této kapitole se seznámíme s pěti typy matic se známou inverzí, kdy si pro každou uvedeme její základní předpis, vztah pro výpočet matice inverzní a uvedeme si konkrétní jednoduchý příklad. Pro jednotlivé typy matic přikládáme ukázkou zdrojového kódu z MATLABu.

Při psaní kapitoly budeme vycházet z následujících literárních pramenů: [2], [5], [6], [7] a [8]. Některé uvedené věty a definice jsou z těchto materiálů převzaty či parafrázovány.

### 3.1 Lehmerova matice

#### 3.1.1 Definice

Nechť  $M$  je symetrická matice typu  $n \times n$ . Pro jednotlivé prvky  $m_{ij}$  platí

$$m_{ij} = \frac{\min\{i, j\}}{\max\{i, j\}} = \begin{cases} \frac{i}{j} & j \geq i \\ \frac{j}{i} & j < i. \end{cases} \quad (3.1)$$

Takto zadanou matici nazýváme maticí Lehmerovou.

## 3.1.2 LU rozklad

**Lemma 3.1.1.** Pro LU rozklad matice  $M$  platí

$$M = LU, \quad (3.2)$$

kde  $L = (l_{ij})$  je dolní trojúhelníková matice typu  $n \times n$ , pro jejíž prvky  $l_{ij}$  platí

$$l_{ij} = \begin{cases} \frac{j}{i} & \text{pokud } i \geq j \\ 0 & \end{cases} \quad (3.3)$$

a  $U = (u_{ij})$  je horní trojúhelníková matice typu  $n \times n$ , jejíž prvky  $u_{ij}$  splňují

$$u_{ij} = \begin{cases} \frac{2i-1}{ij} & \text{pokud } j \geq i \\ 0. & \end{cases} \quad (3.4)$$

**Důkaz.** Celý důkaz rozdělíme do tří případů:

1. Příklad, kdy  $i = j$ :

$$\begin{aligned} m_{ij} &= \sum_{k=1}^n l_{ik} u_{ki} = \sum_{k=1}^i l_{ik} u_{ki} = \sum_{k=1}^i \frac{k}{i} \frac{(2k-1)}{ik} = \sum_{k=1}^i \frac{(2k-1)}{i^2} = \frac{1}{i^2} \sum_{k=1}^i (2k-1) = \\ &= \frac{1}{i^2} \left( \sum_{k=1}^i (2k) - \sum_{k=1}^i (1) \right) = \frac{1}{i^2} \left( \left( 2 \cdot \frac{(i+1)i}{2} \right) - i \right) = \frac{1}{i^2} \cdot i^2 = 1; \end{aligned} \quad (3.5)$$

2. pro  $i < j$ :

$$\begin{aligned} m_{ij} &= \sum_{k=1}^n l_{ik} u_{kj} = \sum_{k=1}^i l_{ik} u_{kj} = \sum_{k=1}^i \frac{k}{i} \frac{(2k-1)}{jk} = \sum_{k=1}^i \frac{(2k-1)}{ji} = \frac{1}{ji} \sum_{k=1}^i (2k-1) = \\ &= \frac{1}{ji} \left( \sum_{k=1}^i (2k) - \sum_{k=1}^i (1) \right) = \frac{1}{ji} \cdot i^2 = \frac{i}{j}; \end{aligned} \quad (3.6)$$

3. a pro  $i > j$ :

$$\begin{aligned} m_{ij} &= \sum_{k=1}^n l_{ik} u_{kj} = \sum_{k=1}^j l_{ik} u_{kj} = \sum_{k=1}^j \frac{k}{i} \frac{(2k-1)}{jk} = \sum_{k=1}^j \frac{(2k-1)}{ji} = \frac{1}{ji} \sum_{k=1}^j (2k-1) = \\ &= \frac{1}{ji} \left( \sum_{k=1}^j (2k) - \sum_{k=1}^j (1) \right) = \frac{1}{ji} \cdot j^2 = \frac{j}{i}. \quad \square \quad (3.7) \end{aligned}$$

**Příklad**

$$M_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/2 & 1 & 2/3 & 1/2 \\ 1/3 & 2/3 & 1 & 3/4 \\ 1/4 & 1/2 & 3/4 & 1 \end{bmatrix}, L_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 2/3 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 3/4 & 1 \end{bmatrix}, U_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 0 & 3/4 & 1/2 & 3/8 \\ 0 & 0 & 5/9 & 5/12 \\ 0 & 0 & 0 & 7/16 \end{bmatrix}. \quad (3.8)$$

**3.1.3 Inverze**

Ke zjištění inverzní matice k Lehmerově matici  $M$  využijeme znalosti  $LU$  rozkladu a vztahu  $M^{-1} = U^{-1}L^{-1}$ . Potřebujeme tedy nejdříve zjistit inverzní matice k maticím  $L$  a  $U$ .

**Lemma 3.1.2.** Předpokládejme, že  $L^{-1} = (t_{ij})$  je inverzní maticí k dolní trojúhelníkové matici  $L$ . Pak

$$t_{ij} = \frac{\min\{i,j\}}{\max\{i,j\}} = \begin{cases} 1 & \text{pokud } j = i \\ -\frac{j}{i} & \text{pokud } i = j + 1 \\ 0. & \end{cases} \quad (3.9)$$

**Důkaz.** Vycházíme z předpokladu, že platí  $L^{-1}L = I$ , kde prvky jednotkové matice  $I$  označíme  $i_{kl}$

1. Pro  $k = l$ :

$$i_{k,k} = \sum_{i=1}^n t_{k,i}l_{i,k} = t_{k,k-1}l_{k-1,k} + t_{k,k}l_{k,k} = -\frac{k-1}{k} \cdot 0 + \frac{k}{k} \cdot 1 = 1; \quad (3.10)$$

2. pro  $k > l$

$$i_{k,l} = \sum_{i=1}^n t_{k,i}l_{i,l} = t_{k,k-1}l_{k-1,l} + t_{k,k}l_{k,l} = -\frac{k-1}{k} \frac{l}{k-1} + 1 \cdot \frac{l}{k} = 0; \quad (3.11)$$

3. pro  $k < l$

$$\begin{aligned} i_{k,l} &= \sum_{i=1}^n t_{k,i}l_{i,l} = t_{k,k-1}l_{k-2,l} + t_{k,k}l_{k-1,l} + t_{k,k+1}l_{l,l} = \\ &= -\frac{k-1}{k} \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot \frac{l}{l} = 0. \end{aligned} \quad (3.12)$$

□

**Lemma 3.1.3.** Předpokládejme, že  $U^{-1} = (w_{ij})$  je inverzní maticí k horní trojúhelníkové matici  $U$ . Pak

$$w_{ij} = \begin{cases} \frac{i^2}{2i-1} & \text{pokud } i = j \\ -\frac{i(i+1)}{2i+1} & \text{pokud } j = i + 1 \\ 0. & \end{cases} \quad (3.13)$$

**Důkaz.** Vycházíme z předpokladu, že platí  $U^{-1}U = I$ , kde prvky jednotkové matice  $I$  označíme  $i_{kl}$

1. Pro  $k = l$ :

$$i_{k,k} = \sum_{i=1}^n w_{k,i}u_{i,k} = w_{k,k}u_{k,k} + w_{k,k+1}u_{k+1,k} = \frac{k^2}{2k-1} \frac{2k-1}{k^2} = 1; \quad (3.14)$$

2. pro  $k > l$

$$\begin{aligned} i_{k,l} &= \sum_{i=1}^n w_{k,i}u_{i,l} = w_{k,k}u_{k+1,l} + w_{k,k+1}u_{k+2,l} = \\ &= \frac{k^2}{2k-1} \cdot 0 + \frac{-(k+2)(k+2)}{2(k+2)+1} \cdot 0 = 0; \end{aligned} \quad (3.15)$$

3. pro  $k < l$

$$\begin{aligned} i_{k,l} &= \sum_{i=1}^n w_{k,i}u_{i,l} = w_{k,k}u_{k,l} + w_{k,k+1}u_{k+1,l} = \\ &= \frac{k^2}{2k-1} \frac{2k-1}{kl} - \frac{k(k+1)}{2k+1} \frac{2k+1}{(k+1)l} = 0. \end{aligned} \quad (3.16)$$

□

**Věta 3.1.4.** Nechť  $M^{-1} = (b_{ij})$  pro  $n > 0$ , pak

$$b_{ij} = \begin{cases} \frac{4i^3}{4i^2-1} & \text{pokud } i = j < n \\ \frac{n^2}{2n-1} & \text{pokud } i = j = n \\ -\frac{i(i+1)}{2i+1} & \text{pokud } |i - j| = 1 \\ 0. & \end{cases} \quad (3.17)$$

**Důkaz.** Díky předpokladu, že  $M^{-1} = U^{-1}L^{-1}$  a využitím Lemma (3.1.2) a Lemma (3.1.3) získáme pro  $1 \leq i \leq n-1$ ,

$$\begin{aligned} b_{i,i} &= \sum_{k=1}^n w_{i,k}t_{k,i} = w_{i,i} + w_{i,i+1}t_{i+1,i} = \\ &= \frac{i^2}{2i-1} + \frac{i(i+1)}{2i+1} \frac{i}{(i+1)} = \frac{i^2}{2i-1} + \frac{i^2}{2i+1} = \frac{4i^3}{4i^2-1}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Je-li splněna podmínka  $i = j = n$ , pak je zřejmé, že  $b_{n,n} = w_{n,n} = \frac{n^2}{2n-1}$ . Pokud  $i = j+1$ , pak

$$b_{i+1,i} = \sum_{k=1}^n w_{i+1,k}t_{k,i} = w_{i+1,i+1}t_{i+1,i} = \frac{(i+1)^2}{2i+1} \frac{-i}{i+1} = \frac{i(i+1)}{2i+1}. \quad (3.19)$$



Poslední situace, která může nastat, je  $j = i + 1$  a lze ji dokázat stejným způsobem jako situaci předešlou.  $\square$

**Poznámka.** Při implementaci předpisu pro výpočet inverzní matice bylo zjištěno, že v případě, kdy  $|i - j| = 1$  není ošetřeno, která z hodnot  $i, j$  je větší a proto bylo třeba předpis pro inverzní matici  $M^{-1}$  upravit tímto způsobem

$$b_{ij} = \begin{cases} \frac{4i^3}{4i^2-1} & \text{pokud } i = j < n \\ \frac{n^2}{2n-1} & \text{pokud } i = j = n \\ -\frac{i(i+1)}{2i+1} & \text{pokud } |i - j| = 1 \wedge i < j \\ -\frac{j(j+1)}{2j+1} & \text{pokud } |i - j| = 1 \wedge j < i \\ 0. & \end{cases} \quad (3.20)$$

### 3.1.4 Konkrétní příklad

$$M_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/2 & 1 & 2/3 & 1/2 \\ 1/3 & 2/3 & 1 & 3/4 \\ 1/4 & 1/2 & 3/4 & 1 \end{bmatrix}, M_4^{-1} = \begin{bmatrix} 4/3 & -2/3 & 0 & 0 \\ -2/3 & 32/15 & -6/5 & 0 \\ 0 & -6/5 & 108/35 & -12/7 \\ 0 & 0 & -12/7 & 16/7 \end{bmatrix}. \quad (3.21)$$

### 3.1.5 Ukázka implementace v MATLABu

```
function [Leh_Mat_Inv ] = Lehmer( n )

format rat

Leh_Mat_Inv = zeros(n,n);

for i = 1:n
    for j = 1:n
        if i == j
            if j < n
                Leh_Mat_Inv(i,j) = (4*i^3)/(4*i^2 - 1);
            elseif j == n
                Leh_Mat_Inv(i,j) = (n^2)/(2*n - 1);
            end
        elseif abs(i-j) == 1
            if i < j
                Leh_Mat_Inv(i,j) = -i*(i+1)/(2*i+1);
            else
                Leh_Mat_Inv(i,j) = -j*(j+1)/(2*j+1);
            end
        else
            Leh_Mat_Inv(i,j) = 0;
        end
    end
end
end
```

Výpis 3.1: Algoritmus pro výpočet inverze Lehmerovy matice

## 3.2 Pascalova matice

### 3.2.1 Definice

Nechť  $P$  je matice typu  $n \times n$  pro každé číslo  $n > 0$ . Pokud pro jednotlivé prvky  $a_{ij}$  matice  $P$  platí tento předpis

$$a_{ij} = \begin{cases} \binom{i-1}{j-1} & \text{pokud } i \geq j \geq 1 \\ 0, & \end{cases} \quad (3.22)$$

pak tuto matici nazýváme Pascalovou dolní trojúhelníkovou maticí.

### 3.2.2 Typy Pascalových matic a vztahy mezi nimi

Pascalův trojúhelník lze maticově zapsat třemi způsoby jako:

- Dolní trojúhelníkovou maticí  $P$ ;
- Horní trojúhelníkovou maticí  $P'$ ;
- Symetrickou maticí  $S$ , pro kterou platí předpis  $S = PP'$ .

**Příklad**

$$P_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}, P'_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.23)$$

Z výše uvedených matic snadno spočítáme symetrickou matici  $S$

$$S_4 = P_4 P'_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{bmatrix}. \quad (3.24)$$

### 3.2.3 Inverzní matice

Výpočet inverzní matice provedeme pro dolní trojúhelníkovou maticí  $P$ .

Mějme inverzní matici  $P^{-1}$  typu  $n \times n$  k matici  $P$ , pak pro jednotlivé její prvky  $t_{ij}$  platí

$$t_{ij} = \begin{cases} (-1)^{i-j} \binom{i-1}{j-1} & \text{pokud } i \geq j \geq 1 \\ 0. & \end{cases} \quad (3.25)$$

Inverzi horní trojúhelníkové matice  $P'^{-1}$  dostaneme tak, že provedeme transpozici inverzní dolní trojúhelníkové matice

$$(t_{ij})' = \begin{cases} (-1)^{i-j} \binom{i-1}{j-1} & \text{pokud } j \geq i \geq 1 \\ 0. & \end{cases} \quad (3.26)$$

Inverzní Pascalovu symetrickou matici získáme stejným způsobem jako Pascalovu symetrickou matici  $S$ , tedy vynásobením dolní a horní inverzní trojúhelníkové matice

$$S^{-1} = P^{-1}(P^{-1})'. \quad (3.27)$$

### 3.2.4 Konkrétní příklad

$$P_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}, P_4^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}, (P_4^{-1})' = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.28)$$

$$\begin{aligned} S_4^{-1} &= P_4^{-1}(P_4^{-1})' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -3 & 4 \\ 1 & -3 & 6 & -10 \\ -1 & 4 & -10 & 20 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.29)$$

### 3.2.5 Ukázka implementace v MATLABu

```
function [Inv_LPas_Mat, Inv_SPas_Mat] = Pascal(n)

format rat

Inv_LPas_Mat = zeros(n,n);
Inv_SPas_Mat = zeros(n,n);

for i = 1:n
    for j = 1:n
        if i >= j && j >= 1
            Inv_LPas_Mat(i,j) = ((-1)^(i-j))*(factorial(i-1)/(factorial(j-1)*factorial((i-1)-(j-1))));
        end
    end
end

Inv_SPas_Mat = Inv_LPas_Mat' * Inv_LPas_Mat;

end
```

Výpis 3.2: Algoritmus pro výpočet inverze Pascalovy dolní trojúhelníkové matice a symetrické matice

### 3.3 Cauchyova matice

#### 3.3.1 Definice

Nechť máme dva vektory  $u = [u_1, u_2, u_3, \dots, u_n]$  a  $v = [v_1, v_2, v_3, \dots, v_n]$ . Matici  $C$  typu  $n \times n$  nazýváme Cauchyovou maticí, splňují-li její prvky předpis

$$c_{ij} = \frac{1}{u_i + v_j}. \quad (3.30)$$

#### 3.3.2 Inverzní matice

K získání inverzní matice potřebujeme submatici  $C_{km}$ , kterou dostaneme tak, že vynecháme  $k$ -tý řádek a  $m$ -tý sloupec matice  $C$ . Abychom mohli vyjádřit předpis inverze pro jednotlivé prvky matice, využijeme Cramerova pravidla a tedy

$$(c^{-1})_{m,k} = (-1)^{k+m} \frac{\det(C_{km})}{\det(C)}. \quad (3.31)$$

Vztahy pro výpočet determinantu obou matic jsou použity z materiálu [7]. Pro matici  $C$  máme

$$\det(C) = \frac{\prod_{i < j} (u_i - u_j) \prod_{i < j} (v_i - v_j)}{\prod_{i,j} (u_i + v_j)} \quad (3.32)$$

a pro matici  $C_{km}$

$$\det(C_{km}) = \frac{\prod_{i < j, i \neq k, j \neq k} (u_i - u_j) \prod_{i < j, i \neq m, j \neq m} (v_i - v_j)}{\prod_{i,j, i \neq k, j \neq m} (u_i + v_j)}. \quad (3.33)$$

Po dosazení vztahů pro determinanty dostaneme následující rovnici

$$(c^{-1})_{m,k} = (-1)^{k+m} \frac{\det(C_{km})}{\det(C)} = \frac{\frac{\prod_{i < j, i \neq k, j \neq k} (u_i - u_j) \prod_{i < j, i \neq m, j \neq m} (v_i - v_j)}{\prod_{i,j, i \neq k, j \neq m} (u_i + v_j)}}{\frac{\prod_{i < j} (u_i - u_j) \prod_{i < j} (v_i - v_j)}{\prod_{i,j} (u_i + v_j)}} \quad (3.34)$$

a po provedení několika úprav, na které se můžeme podívat v literatuře [7] získáme vztah pro výpočet prvků inverzní matice

$$(c^{-1})_{m,k} = (u_k + v_m) \prod_{i=1, i \neq k}^n \frac{u_i + v_m}{u_k - u_i} \prod_{j=1, j \neq m}^n \frac{u_k + v_j}{v_m - v_j}. \quad (3.35)$$

### 3.3.3 Konkrétní příklad

Níže uvedený příklad Cauchyovy matice je pro vektory  $u = [1, 2, 3, 4]$  a  $v = [8, 6, 4, 2]$

$$C_4 = \begin{bmatrix} 1/9 & 1/7 & 1/5 & 1/3 \\ 1/10 & 1/8 & 1/6 & 1/4 \\ 1/11 & 1/9 & 1/7 & 1/5 \\ 1/12 & 1/10 & 1/8 & 1/6 \end{bmatrix},$$

$$C_4^{-1} = \begin{bmatrix} -17325/4 & 23760 & -155925/4 & 19800 \\ 14175/2 & -37800 & 121275/2 & -30240 \\ -6615/2 & 16800 & -51975/2 & 12600 \\ 1575/4 & -1800 & 10395/4 & -1200 \end{bmatrix}. \quad (3.36)$$

### 3.3.4 Ukázka implementace v MATLABu

```
function [ Inv_Cauch_Mat ] = Cauchy( n )

format rat

u = 1:n;
v = 2*n:-2:2;

Inv_Cauch_Mat = zeros(n,n);

for m = 1:n
    for k = 1:n
        x = 1;
        y = 1;
        for r = 1:n
            if r ~= k
                x = x * (u(r) + v(m))/(u(k) - u(r));
            end
        end
        for s = 1:n
            if s ~= m
                y = y * (u(k) + v(s))/(v(m) - v(s));
            end
        end
        Inv_Cauch_Mat(m,k) = (u(k) + v(m))*x*y;
    end
end

end
```

Výpis 3.3: Algoritmus pro výpočet inverze Cauchyovy matice

**Poznámka.** Existuje několik matic, které se řadí právě ke Cauchyovým maticím. Jedním typem je například Hilbertova matice, která je blíže popsána v následující části.

### 3.4 Hilbertova matice

#### 3.4.1 Definice

Nechť  $H$  je čtvercová matice, pro jejíž prvky platí

$$h_{ij} = \frac{1}{i+j-1}, \quad (3.37)$$

pak tuto matici nezmene maticí Hilbertovou.

Hilbertova matice  $H$  je jednou ze speciálních typů Cauchyovy matice. Pokud vstupními vektory jsou právě tyto dva  $u = [1, 2, 3, 4]$  a  $v = [0, 1, 2, 3]$ , pak dosazením hodnot do rovnice (3.30) taktéž získáme Hilbertovu matici.

#### 3.4.2 Inverzní matice

Inverzní matici  $H^{-1}$  získáme tak, že pro pozici jednotlivých prvků  $h_{ij}$  spočítáme hodnotu rovnice

$$h_{ij}^{-1} = (-1)^{i+j} (i+j-1) \binom{k+i-j}{k-j} \binom{k+j-1}{k-i} \binom{i+j-2}{i-1}^2. \quad (3.38)$$

#### 3.4.3 Konkrétní příklad

$$H_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 \\ 1/4 & 1/5 & 1/6 & 1/7 \end{bmatrix}, H_4^{-1} = \begin{bmatrix} 16 & -120 & 240 & -140 \\ -120 & 1200 & -2700 & 1680 \\ 240 & -2700 & 6480 & -4200 \\ -140 & 1680 & -4200 & 2800 \end{bmatrix}. \quad (3.39)$$

#### 3.4.4 Ukázka implementace v MATLABu

```
function [ Inv_Hil_Mat ] = Hilbert( n )

format rat

Inv_Hil_Mat = zeros(n,n);

for i = 1:n
    for j = 1:n
        Inv_Hil_Mat(i, j) = (-1)^(i+j)*(i+j-1)*nchoosek(n+i-1,n-j)*nchoosek(n+j-1,n-i)*
            nchoosek(i+j-2, i-1)^2;
    end
end

end
```

Výpis 3.4: Algoritmus pro výpočet inverze Hilbertovy matice

### 3.5 Vandermondova matice

#### 3.5.1 Definice

Mějme dán vektor  $v = [x_1, x_2, x_3, \dots, x_n]$  a matici  $V$ . Matici  $V$  říkáme Vandermondova matice, jestliže její tvar vypadá následovně

$$V = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \cdots & x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{bmatrix}. \quad (3.40)$$

#### 3.5.2 Inverzní matice

Výpočet inverzní matice k matici  $V$  provedeme pomocí inverzních matic  $L^{-1}$  a  $U^{-1}$ , kde  $L^{-1}$  je dolní trojúhelníková matice a  $U^{-1}$  je horní trojúhelníková matice. Pro inverzní matici  $V^{-1}$  platí následující předpis

$$V^{-1} = U^{-1}L^{-1}, \quad (3.41)$$

přičemž pro prvky  $l_{ij}$  matice  $L^{-1}$  platí

$$l_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{pokud } i = j = 1 \\ 0 & \text{pokud } i < j \\ \prod_{k=1}^i \prod_{k \neq j} \frac{1}{x_j - x_k}, & \end{cases} \quad (3.42)$$

pak tedy matice  $L^{-1}$  vypadá následovně

$$L^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{x_1 - x_2} & \frac{1}{x_2 - x_1} & 0 & \cdots \\ \frac{1}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} & \frac{1}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} & \frac{1}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \end{bmatrix} \quad (3.43)$$



a pro prvky  $u_{ij}$  matice  $U^{-1}$  platí

$$u_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{pokud } i = j \\ 0 & \text{pokud } j = 1 \\ u_{i-1,j-1} - u_{i,j-1}x_{j-1}, & \end{cases} \quad (3.44)$$

kde pro prvek  $u_{0j}$  platí, že jeho hodnota je nulová a matice  $U^{-1}$  má tvar

$$U^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -x_1 & x_1x_2 & -x_1x_2x_3 & \cdots \\ 0 & 1 & -(x_1 + x_2) & x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & -(x_1 + x_2 + x_3) & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \end{bmatrix}. \quad (3.45)$$

### 3.5.3 Konkrétní příklad

Příklad Vandermondovy matice a její inverze je uveden pro vektor  $v = [2, 3, 4, 5]$

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \\ 1 & 5 & 25 & 125 \end{bmatrix}, \quad (3.46)$$

$$\begin{aligned} V^{-1} &= U^{-1}L^{-1} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -2 & 6 & -24 \\ 0 & 1 & -5 & 26 \\ 0 & 0 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -20 & 15 & -4 \\ -\frac{47}{6} & 19 & -\frac{31}{2} & \frac{13}{3} \\ 2 & -\frac{11}{2} & 5 & -\frac{3}{3} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.47)$$

## 3.5.4 Ukázka implementace v MATLABu

```
function [Van_Mat_Inv] = Vander( n )

format rat
v = 1:n;

Van_Mat_Inv = zeros(n,n);
Li = ones(n,n);
Ui = ones(n,n);

for i = 1:l
    for j = 1:l
        if i < j
            Li(i,j) = 0;
        elseif i == j && i == 1
            Li(i, j) = 1;
        else
            for k = 1:i
                if k ~= j
                    Li(i, j) = Li(i, j) * (1/(v(j)-v(k)));
                end
            end
        end
    end
end

for i = 1:l
    for j = 1:l
        if i == j
            Ui(i, j) = 1;
        elseif j == 1
            Ui(i, j) = 0;
        else
            if i == 1
                Ui(i, j) = 0 - Ui(i, j-1)*v(j-1);
            else
                Ui(i, j) = Ui(i-1,j-1) - Ui(i, j-1)*v(j-1);
            end
        end
    end
end

Van_Mat_Inv = Ui*Li;

end
```

Výpis 3.5: Algoritmus pro výpočet inverze Vandermondovy matice

## Kapitola 4

# Testování a nepřesnosti při počítání

Tato kapitola je věnována samotnému testování matic, se kterými jsme se seznámili v předešlé části. Abychom dobře porozuměli hodnotám, které jsou obsaženy v tabulkách, bude zapotřebí se seznámit s problematikou reprezentace čísel s plovoucí řadovou čárkou v počítači a s tímto spojeným strojovým epsilon. Také se budeme zabývat chybami, ke kterým může při počítání dojít. Nakonec provedeme ke každé matici z kapitoly Matice se známou inverzí (3) testy.

Při tvorbě části (4.1) jsme využili informací obsažených v literatuře [9] a podkladem pro sekci (4.2) byl materiál [4].

### 4.1 Čísla s plovoucí řadovou čárkou

#### 4.1.1 Obecné vyjádření

Reálná čísla v počítačové aritmetice neexistují ve stejném smyslu, jako v matematice. V počítači jsou všechna čísla vyjadřována s konečnou přesností.

Čísla s pohyblivou řadovou čárkou jsou reprezentována na základě rozdělení bitů daného čísla  $x$  a platí

$$x = s \times B^{c-E} \times M, \quad (4.1)$$

kde:

- $s \dots$  bit reprezentující kladné (0), či záporné (1) znaménko;
- $B \dots$  základ (obvykle  $B = 2$ );
- $c \dots$  exponent typu *unsigned integer*;
- $E \dots$  konstanta pevně daná pro každý stroj či reprezentaci umožňující záporné hodnoty pro exponent;
- $M \dots$  mantisa.

### 4.1.2 IEEE standard

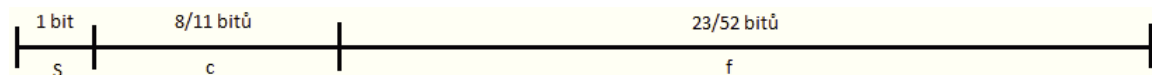
IEEE standard je používán v mnoha počítačích a strojích a určuje, jak má být číslo s plovoucí řadovou čárkou prezentováno.

Číslo reprezentované dle IEEE standardu lze zapsat tímto vztahem

$$x = s \times 2^{c-E} \times (1.f)_2, \quad (4.2)$$

kde:

- $s \dots$  bit reprezentující kladné (0), či záporné (1) znaménko;
- $c \dots$  exponent typu *unsigned integer*;
- $E \dots$  konstanta pevně daná pro každý stroj či reprezentaci umožňující záporné hodnoty pro exponent;
- $f \dots$  mantisa v *1-plus* formě.



Obrázek 4.1: Reprezentace čísla podle IEEE standardu

### 4.1.3 Strojové epsilon

(též Strojová přesnost) je definováno jako *nejmenší číslo, které může být přičteno k 1.0, abychom získali hodnotu odlišnou od jedné*. Slouží k získání přesnosti výpočtu při počítání s čísly s plovoucí řadovou čárkou.

Používáme-li *single*-přesnost, pak máme pro mantisu vyhrazeno 23 bitů. Strojové epsilon poté nabývá ve dvojkové soustavě hodnoty  $2^{-23}$ , v desítkové soustavě to představuje přibližně  $1.19 \times 10^{-7}$ , což znamená, že číslo je reprezentováno s přesností na 6 desetinných míst.

Je-li využita *double*-přesnost a máme tedy pro mantisu určeno 52 bitů, pak strojové epsilon ve dvojkové soustavě vyjádříme jako  $2^{-52}$ , což nám po převedení do desítkové soustavy dá hodnotu  $2.22 \times 10^{-16}$  a víme, že hodnota, kterou jsme získali je vyjádřena s přesností na 15 desetinných míst.

## 4.2 Chyby

### 4.2.1 Zaokrouhlovací chyby

K chybám způsobeným numerickými výpočty dochází aproximací čísla, což znamená nahrazení čísla  $x$  jeho přibližnou hodnotou  $\tilde{x}$ . Zaokrouhlovacích chyb se na kalkulačce či počítači dopouštíme z důvodu nemožnosti exaktního vyjádření reálných čísel, což jsme si vysvětlili v sekci Čísla s plovoucí řadovou čárkou (4.1).

Chyby aproximace lze stanovit následujícími dvěma způsoby:

**Definice 4.2.1.** Mějme přesnou hodnotu  $x$  a její aproximaci  $\tilde{x}$ .

Rozdíl  $x - \tilde{x}$  nazýváme *absolutní chybou aproximace*. Každé nezáporné číslo  $\varepsilon(\tilde{x})$ , pro které platí

$$\varepsilon(\tilde{x}) \geq |x - \tilde{x}|, \quad (4.3)$$

je *odhadem absolutní chyby*.

Podíl  $\frac{x - \tilde{x}}{\tilde{x}}$  je znám jako *relativní chyba aproximace*. Každé nezáporné číslo  $\delta(\tilde{x})$ , pro které platí

$$\delta(\tilde{x}) \geq \left| \frac{x - \tilde{x}}{\tilde{x}} \right|, \quad (4.4)$$

se nazývá *odhadem relativní chyby*.

**Poznámka.** V našem případě, kdy určujeme numerické chyby vzniklé při provádění početních operací s maticemi, potřebujeme vzorec odhadu relativní chyby upravit následovně

$$\delta(\tilde{X}) \geq \frac{\|X - \tilde{X}\|}{\|\tilde{X}\|}, \quad (4.5)$$

kde:

- $X$  ... inverzní matice získaná pomocí funkce `inv` v MATLABu;
- $\tilde{X}$  ... inverzní matice, která byla spočítána podle známého předpisu.

### 4.3 Testy

K testům, které jsme prováděli, byly využity všechny matice popsané v kapitole Matice se známou inverzí (3). Zaměřili jsme se na srovnání výpočtů, které provádí MATLAB s výpočty, jež byli námi implementovány díky znalosti vzorců. Konkrétně jsme počítali hodnotu čísla podmíněnosti matice  $\kappa(A)$  podle vztahu (2.27), kde jako inverzní matici jsme dosadili inverzi explicitně známou a porovnávali jsme ji s hodnotou získanou použitím příkazu `cond` z MATLABu. Dále jsme porovnávali odchylku výpočtu inverze jednotlivých matic a to tak, že jsme dosadili potřebné hodnoty do vztahu  $\|AA^{-1} - I\|$ , kde  $A$  je jedna z matic zmíněných v kapitole (3). Inverzní matice  $A^{-1}$  je spočtena známým vztahem, nebo příkazem `inv` a  $I$  je jednotková matice.

#### 4.3.1 Testování Lehmerovy matice

| n     | $\kappa(L)$     | <code>cond(L)</code> | $\ LL^{-1} - I\ $ | $\ L \text{ inv}(L) - I\ $ |
|-------|-----------------|----------------------|-------------------|----------------------------|
| 10    | 86.38932        | 86.38932             | 2.34828E-15       | 4.42979E-15                |
| 12    | 127.15806       | 127.15806            | 2.69808E-15       | 6.38895E-15                |
| 14    | 176.09532       | 176.09532            | 4.55859E-15       | 8.16978E-15                |
| 16    | 233.25529       | 233.25529            | 4.93822E-15       | 8.45877E-15                |
| 18    | 298.68046       | 298.68046            | 7.39798E-15       | 1.16021E-14                |
| 20    | 372.40528       | 372.40528            | 7.792003E-15      | 1.73165E-14                |
| 50    | 2487.03175      | 2487.03175           | 4.87310E-14       | 1.56629E-13                |
| 100   | 10268.20318     | 10268.20318          | 2.25601E-13       | 8.92146E-13                |
| 1000  | 1074848.24985   | 1074848.24985        | 1.90169E-11       | 4.22998E-10                |
| 10000 | 108642474.67686 | 108642474.67675      | 2.15149E-9        | 5.34511E-7                 |

Tabulka 4.1: Výsledky testů Lehmerovy matice

Z hodnot uvedených v tabulce lze vyčíst, že čísla podmíněnosti vypočtená vztahem (2.27) a pomocí příkazu `cond` v MATLABu nabývají stejných hodnot. K viditelné odchylce dochází teprve u matice, jejíž rozměr je 10000 × 10000. Řádově je tato odlišnost v deseti-tisícínách, což u takto velké matice není příliš velká diference. Ze všech testovaných matic je Lehmerova matice nejlépe podmíněnou a je jí možné použít k různým testům přesnosti výpočtů, aniž by došlo k výrazným rozdílům od exaktních hodnot. Přesnost výpočtu inverzní matice příkazem `inv` v MATLABu je dobrá, i když pro testy bude lepší využít explicitně známého předpisu pro inverzi. Rozdíly výpočtu se pohybují v řádech  $10^{-15}$  až  $10^{-13}$  pro matice menších rozměrů a pro matice řádu většího je diference okolo  $10^{-7}$ , což jsou velmi malé hodnoty.

### 4.3.2 Testování Pascalových matic

U tohoto typu matice jsme využili její dolní trojúhelníkovou a také symetrickou podobu.

| n  | $\kappa(P)$ | $\text{cond}(P)$ | $\ PP^{-1} - I\ $ | $\ P \text{inv}(P) - I\ $ |
|----|-------------|------------------|-------------------|---------------------------|
| 10 | 64460,88502 | 64460,88502      | 0                 | 4,48E-12                  |
| 20 | 46994838542 | 46994838554      | 0                 | 1,18E-05                  |
| 22 | 7,15849E+11 | 7,15849E+11      | 0                 | 4,24E-04                  |
| 24 | 1,09523E+13 | 1,09523E+13      | 2,78E-07          | 2,72E-02                  |
| 26 | 1,68185E+14 | 1,68185E+14      | 2,78E-07          | 0,19521                   |
| 28 | 2,59073E+15 | 2,59073E+15      | 3,04E-06          | 11,43054                  |
| 30 | 4,00149E+16 | 4,00149E+16      | 7,11E-04          | 64,37489                  |
| 32 | 6,19487E+17 | 6,19463E+17      | 4,21E-03          | 6644,32974                |
| 34 | 9,61008E+18 | 9,60088E+18      | 2,36E-02          | 139801,698                |
| 36 | 1,4935E+20  | 1,55632E+20      | 0,12525           | 636693,5807               |
| 38 | 2,32475E+21 | 2,31186E+21      | 8,9364            | 934329556,9               |
| 40 | 3,62387E+22 | 3,41162E+22      | 31,58221          | 2091746268                |

Tabulka 4.2: Výsledky testů Pascalovy dolní trojúhelníkové matice

Již při prvním pohledu na tabulku s výsledky výpočtů pro Pascalovu dolní trojúhelníkovou matici vidíme, že ve srovnání s maticí Lehmerovou jsou čísla podmíněnosti matice o několik řádů vyšší i u výpočtů, kde není rozměr matice příliš velký. Tato matice nepatří mezi dobře podmíněné typy matic, a není tedy vhodné ji hojně využívat pro testování přesnosti výpočtu algoritmů. V případech, kdy se řád matice pohybuje kolem hodnoty 30, si lze povšimnout, že se číslo podmíněnosti blíží hranici počítačové přesnosti a není proto možné provést výpočty, jejichž výsledky by byly exaktní (počítač není jednoduše schopen interpretovat číslo exaktněji). Při porovnání výpočtu inverze pomocí vztahu (3.25) a příkazem `inv` pozorujeme např. pro matici řádu 32 velkou diferenci hodnot vlivem špatné podmíněnosti matice. Pokud bychom prováděli testy a chtěli bychom použít inverzní matici, pak bude vhodnější zvolit inverzi získanou předpisem (3.25), lze pak předpokládat přesnější výsledky.

| n  | $\kappa(S)$ | cond(S)     | $\ SS^{-1} - I\ $ | $\ S \text{ inv}(S) - I\ $ |
|----|-------------|-------------|-------------------|----------------------------|
| 10 | 4155205697  | 4155205689  | 0                 | 2,75661E-08                |
| 12 | 8,76395E+11 | 8,76395E+11 | 0                 | 1,43364E-06                |
| 14 | 1,90764E+14 | 1,90761E+14 | 0                 | 0,000367067                |
| 16 | 4,24759E+16 | 4,2469E+16  | 0                 | 0,017347834                |
| 18 | 9,62098E+18 | 1,02062E+19 | 0                 | 5,920376433                |
| 20 | 2,20851E+21 | 1,37469E+20 | 187,3100081       | 919,5438001                |
| 22 | 5,12439E+23 | 2,86783E+20 | 76460,95962       | 1549,524889                |
| 24 | 1,19953E+26 | 2,40956E+21 | 3232131,511       | 16642,1477                 |
| 26 | 2,8286E+28  | 4,82538E+22 | 872399413,9       | 28273,28783                |
| 28 | 6,71189E+30 | 8,81526E+23 | 31404535108       | 30302,00296                |
| 30 | 1,6012E+33  | 1,11901E+24 | 2,25056E+13       | 336095,6602                |
| 35 | 1,43465E+39 | 3,01559E+21 | 3,85474E+18       | 214536119,8                |

Tabulka 4.3: Výsledky testů Pascalovy symetrické matice

Symetrická Pascalova matice je další ze špatně podmíněných matic, tudíž můžeme očekávat nepřesné výpočty i u malého řádu matice. V tabulce si lze povšimnout, že již u  $n = 16$  se číslo podmíněnosti pohybuje na hranici počítačové přesnosti. Pro tento řád byl počítač schopen spočítat inverzi s dobrou přesností. Ke změně dochází pro  $n = 18$ , kde v posledním sloupci můžeme vidět, že test inverzní matice získané příkazem `inv` vykazuje diferenci. Pokud bychom pro stejné  $n$  spočítali inverzi pomocí vztahu (3.27), pak výsledkem bude přesnější výpočet.



## 4.3.3 Testování Cauchyovy matice

| n  | $\kappa(C)$ | cond(C)     | $\ CC^{-1} - I\ $ | $\ C \operatorname{inv}(C) - I\ $ |
|----|-------------|-------------|-------------------|-----------------------------------|
| 4  | 65316,28415 | 65316,28415 | 0                 | 3,93378E-12                       |
| 6  | 90884161,4  | 90884161,4  | 1,26428E-09       | 3,03196E-09                       |
| 8  | 1,24799E+11 | 1,24799E+11 | 1,80668E-06       | 7,85841E-06                       |
| 10 | 1,7115E+14  | 1,71104E+14 | 0,007008295       | 0,151749314                       |
| 12 | 2,35108E+17 | 1,52904E+17 | 8,379830135       | 208,1457823                       |
| 14 | 3,2373E+20  | 4,01737E+17 | 11494,85874       | 29288,76117                       |
| 24 | 1,65498E+36 | 6,15489E+18 | 6,27588E+19       | 1587908509                        |
| 26 | 2,30529E+39 | 7,85306E+18 | 8,97458E+22       | 5055067209                        |
| 28 | 3,21533E+42 | 1,64954E+18 | 1,92032E+26       | 2202534500                        |
| 30 | 4,48987E+45 | 6,81297E+18 | 2,86275E+29       | 1,28268E+11                       |
| 35 | 3,28605E+53 | 1,20569E+18 | 1,18021E+37       | 1,39027E+11                       |

Tabulka 4.4: Výsledky testů Cauchyovy matice

Testy Cauchyovy matice byly prováděny pro vektory  $u = [1, 2, 3, 4]$  a  $v = [8, 6, 4, 2]$ . Získaná Cauchyova matice se také řadí mezi špatně podmíněné, což se projeví v hodnotě čísla podmíněnosti matice, které je již pro  $n = 12$  za hranici schopnosti počítače přesně vyjádřit číslo s plovoucí řadovou čárkou. Do této hodnoty je norma, jejíž výsledky jsou zapsány v posledních dvou sloupcích, přibližně nulová. Pro větší řád matice jsou však znatelné diference. Rozdíl můžeme pozorovat také mezi čísly podmíněnosti. Pokud jsme jej počítali pomocí vztahu (2.27), pak se jeho hodnota pohybuje řádově až kolem  $10^{+53}$ , kdežto při použití příkazu `cond` číslo podmíněnosti nepřesáhlo  $10^{+18}$ . Opět jsou tyto nepřesnosti způsobené neschopností počítače interpretovat čísla s plovoucí řadovou čárkou. Vzhledem k tomu, že se testovala matice pro dva určité vektory, lze tedy předpokládat, že pro jiné budou hodnoty v tabulce odlišné. Pokud bychom provedli volbu vektorů vhodným způsobem, pak by mohla vzniklá Cauchyova matice být i dobře podmíněná.

## 4.3.4 Testování Hilbertovy matice

| n  | $\kappa(H)$ | cond(H)     | $\ HH^{-1} - I\ $ | $\ H \text{ inv}(H) - I\ $ |
|----|-------------|-------------|-------------------|----------------------------|
| 4  | 15513,73874 | 15513,73874 | 5,68434E-14       | 1,13919E-13                |
| 6  | 14951058,64 | 14951058,64 | 1,4552E-11        | 1,27503E-10                |
| 8  | 15257575742 | 15257575550 | 4,82219E-08       | 1,31967E-07                |
| 10 | 1,60263E+13 | 1,60249E+13 | 1,61287E-05       | 0,000148415                |
| 12 | 1,71323E+16 | 1,67756E+16 | 0,055766794       | 0,183552616                |
| 14 | 1,85338E+19 | 3,0821E+17  | 188,8844583       | 22,89819965                |
| 24 | 3,02389E+34 | 5,53732E+18 | 1,92775E+17       | 95,09817388                |
| 26 | 3,37339E+37 | 1,55737E+19 | 2,71628E+20       | 8,387570433                |
| 28 | 3,77253E+40 | 3,77668E+18 | 2,1097E+23        | 15,37894615                |
| 30 | 4,22781E+43 | 5,46986E+19 | 2,24706E+26       | 13,41970217                |
| 35 | 1,79108E+51 | 2,19494E+18 | 1,88745E+34       | 24,19135073                |

Tabulka 4.5: Výsledky testů Hilbertovy matice

Stejně, jako většina předchozích matic, je i Hilbertova matice špatně podmíněnou. Již pro  $n = 12$  se číslo podmíněnosti matice na hranici schopnosti počítače vyjádřit číslo s plovoucí řadovou čárkou, tudíž můžeme očekávat, že pro větší řád matice získáme nepřesné výsledky způsobené touto špatnou interpretací čísel. Pro  $n \leq 14$  se hodnota čísla podmíněnosti řádově pohybuje až do  $10^{51}$ , kdežto u hodnot získaných příkazem `cond` můžeme pozorovat, že nepřesáhnou  $10^{19}$ . Tyto rozdíly způsobují diferencí u testů inverzních matic. Vidíme, že pro inverzi vypočítanou vztahem (3.38), kdy  $n = 35$ , je chyba okolo  $10^{34}$ , kdežto při použití příkazu `inv` není počítač schopen dosáhnout přesnosti vyšší než  $10^8$ .

## 4.3.5 Testování Vandermondovy matice

| n  | $\kappa(V)$ | cond(V)     | $\ VV^{-1} - I\ $ | $\ V \text{inv}(V) - I\ $ |
|----|-------------|-------------|-------------------|---------------------------|
| 10 | 2,10626E+12 | 2,10626E+12 | 1,49055E-09       | 9,67374E-09               |
| 12 | 7,0719E+15  | 6,9779E+15  | 4,02505E-08       | 5,22142E-07               |
| 14 | 3,35137E+19 | 6,8004E+17  | 5,42356E-06       | 0,000237022               |
| 16 | 2,13037E+23 | 3,22685E+21 | 0,000152409       | 0,079528722               |
| 18 | 1,74923E+27 | 2,31425E+23 | 0,014108812       | 11,34482962               |
| 20 | 1,80198E+31 | 4,94493E+26 | 0,366123524       | 1273,164384               |
| 22 | 2,27566E+35 | 2,41135E+29 | 39,28931695       | 56851,79949               |
| 24 | 3,45727E+39 | 8,35609E+32 | 1097,479567       | 1004185,951               |
| 26 | 6,22052E+43 | 1,30516E+38 | 165567,8794       | 387652,6286               |
| 28 | 1,30813E+48 | 3,86338E+40 | 11900300,59       | 4894895,532               |
| 30 | 3,17908E+52 | 5,68741E+43 | 731514175,2       | 9580803,205               |
| 35 | 5,18512E+63 | 5,39421E+53 | 4,25879E+13       | 450274282,4               |

Tabulka 4.6: Výsledky testů Vandermondovy matice

Vandermondova matice je jedinou z testovaných matic, u níž proběhl dobrý výpočet inverze, přestože číslo podmíněnosti matice přesáhlo hodnotu, kterou počítač není schopen exaktně vyjádřit. Pro  $n = 16$  je číslo podmíněnosti matice řádově v  $10^{+23}$  při použití vztahu (2.27) a  $10^{+21}$  u příkazu `cond`, přesto je chyba výpočtu inverzní matice téměř nulová. Pokud  $n \leq 20$ , pak inverze získaná vztahem (3.41) je spočtena téměř přesně. Je-li hodnota  $n$  větší, pak ani takto spočítaná inverzní matice není exaktní a v tabulce můžeme pozorovat chyby, které se např. pro  $n = 35$  pohybují okolo  $10^{+13}$ .

## Kapitola 5

### Závěr

Cílem této bakalářské práce bylo porovnat přesnost výpočtu inverzní matice. Za tímto účelem jsme v programu MATLAB, jež jsme pro veškeré výpočty používali, implementovali algoritmy k získání inverzní matice. Ke každému typu speciálních matic se známou inverzí byl napsán algoritmus, jež pro určitý rozměr  $n$  vypočítal pomocí jednoduchých vzorců inverzi. Takto vzniklé inverzní matice jsme podrobili testům přesnosti.

Abychom zjistili, nakolik byl výpočet přesný, dosadili jsme jednotlivé matice do vztahu

$$\|AA^{-1} - I\|,$$

kde  $I$  je jednotková matice typu  $n \times n$ ,  $A$  je matice typu  $n \times n$  a  $A^{-1}$  je inverzní matice typu  $n \times n$ , kterou jsme získali výše zmíněnými algoritmy. Tyto hodnoty jsme pak srovnali s hodnotami, které jsme vypočítali tak, že za matici  $A^{-1}$  byla dosazena inverze získaná MATLABovským příkazem `inv`.

Taktéž jsme se zaměřili na číslo podmíněnosti matice  $\kappa(A)$ . Jeho výpočet byl proveden dosazením do vztahu

$$\kappa(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|,$$

kde byla použita známá inverzní matice a pozorovali jsme rozdíly mezi takto získaným číslem podmíněnosti a hodnotou, jež jsme vypočítali použitím příkazu `cond` v MATLABU.

Na diferenci porovnávaných hodnot měla vliv počítačová aritmetika, jež jsme věnovali část bakalářské práce. Pokud se číslo podmíněnosti pohybovalo na hranici počítačové přesnosti, tedy kolem hodnoty  $10^{+16}$  nebo větší, pak docházelo ve výpočtech k výrazným nepřesnostem. Počítač není schopen vyjádřit číslo s vyšší přesností, což zapříčinilo chyby vzniklé nutností zaokrouhlování.

Pokud bychom tedy chtěli využívat inverzní matice pro testování různých algoritmů, pak bude lepší zvolit známou inverzi. Chyby, které získáme nejsou natolik velké na rozdíl od inverzí vypočítaných příkazem `inv`. Ze všech testovaných matic je pro testy nejvhodnější Lehmerova matice (3.1), která je dobře podmíněná i pro vyšší řád matice a diference výpočtu nebyla natolik velká, jako tomu bylo u ostatních matic.

# Literatura

- [1] DOSTÁL,Z., VONDRÁK.V., *Lineární algebra* [online]: skriptum. Ver. 24.4.2012, Vysoká škola Báňská - Technická univerzita Ostrava a Západočeská univerzita v Plzni, 2012. [citováno 2013-03-26]  
Dostupné na internetu: <[http://mi21.vsb.cz/sites/mi21.vsb.cz/files/unit/linearni\\_algebra.pdf](http://mi21.vsb.cz/sites/mi21.vsb.cz/files/unit/linearni_algebra.pdf)>.
- [2] KILIC.E, STANICA.P., *The Lehmer matrix and its recursive analogue* [online]. Naval Postgraduate School, Department of Applied Mathematics, Monterey, CA, 93943, 2010. [citováno 2013-03-26]  
Dostupné na internetu:<<http://faculty.nps.edu/pstanica/research/lehmerKS.pdf>>.
- [3] BRZOBOHATÝ,T., HAPLA.V., JAROŠOVÁ,M., KOZUBEK,T., MARKOPOULOS,A., *Lineární algebra s Matlabem* [online]: skriptum. Vysoká škola Báňská - Technická univerzita Ostrava a Západočeská univerzita v Plzni, 2012. [citováno 2013-04-04]  
Dostupné na internetu: <[http://mi21.vsb.cz/sites/mi21.vsb.cz/files/unit/linearni\\_algebra\\_s\\_matlabem.pdf](http://mi21.vsb.cz/sites/mi21.vsb.cz/files/unit/linearni_algebra_s_matlabem.pdf)>.
- [4] VONDRÁK,V., POSPÍŠIL,L., *Numerické metody I* [online]: skriptum. Vysoká škola Báňská - Technická univerzita Ostrava a Západočeská univerzita v Plzni, 2011. [citováno 2013-03-28]  
Dostupné na internetu: <[http://mi21.vsb.cz/sites/mi21.vsb.cz/files/unit/numericke\\_metody.pdf](http://mi21.vsb.cz/sites/mi21.vsb.cz/files/unit/numericke_metody.pdf)>.
- [5] WIENERS,Ch., *An explicit formula for the inverse of the Hilbert matrix*. Institut für Computeranwendungen, Universität Stuttgart.
- [6] EDELMAN,A., STRANG,G., *Pascal Matrices* [online]. The Mathematical Association of America, 2004. [citováno 2013-04-04]  
Dostupné na internetu: <[http://mathdl.maa.org/images/upload\\_library/22/Ford/Edelman189-197.pdf](http://mathdl.maa.org/images/upload_library/22/Ford/Edelman189-197.pdf)>.
- [7] KOEV,P., *Inverse of a Cauchy matrix* [online]. SJSU Department of Mathematics. [citováno 2013-04-05]  
Dostupné na internetu: <<http://www.math.sjsu.edu/~koev/teaching/math143M/Cauchy.pdf>>.

- 
- [8] TURNER,R.L., *Inverse of the Vandermonde matrix with applications (NASA technical note)* [online]. National Aeronautics and Space Administration, 1966. [citováno 2013-04-06]  
Dostupné na internetu: <[http://ntrs.nasa.gov/archive/nasa/casi.ntrs.nasa.gov/19660023042\\_1966023042.pdf](http://ntrs.nasa.gov/archive/nasa/casi.ntrs.nasa.gov/19660023042_1966023042.pdf)>.
- [9] LINNA,R., *LECTURE 1: Number representation and errors* [online]: učební text. Aalto University School of Science, 2012. [citováno 2013-04-07]  
Dostupné na internetu: <[http://www.lce.hut.fi/teaching/S-114.1100/lect\\_1.pdf](http://www.lce.hut.fi/teaching/S-114.1100/lect_1.pdf)>.
- [10] KUČERA,R., *Numerické metody* [online]: studijní opora. Vysoká škola Báňská - Technická univerzita Ostrava. [citováno 2013-04-23]  
Dostupné na internetu: <[http://home1.vsb.cz/~kuc14/textyNM/FINALNI\\_VERZE\\_CD.pdf](http://home1.vsb.cz/~kuc14/textyNM/FINALNI_VERZE_CD.pdf)>.

# Přílohy

CD příloha obsahuje soubor:

*Testy.xlsx* - tabulky obsahující veškeré hodnoty získané při testování matic

a tyto MATLABovské funkce:

*Cauchy.m* - metoda vracející Cauchyovu matici typu  $n \times n$  a její inverzi

*Cauch\_test.m* - metoda zapisující do souboru *Testy.xlsx* výsledky testů Cauchyovy matice pro dané  $n$

*Hilbert.m* - metoda vracející Hilbertovu matici typu  $n \times n$  a její inverzi

*Hilb\_test.m* - metoda zapisující do souboru *Testy.xlsx* výsledky testů Hilbertovy matice pro dané  $n$

*Lehmer.m* - metoda vracející Lehmerovu matici typu  $n \times n$  a její inverzi

*Lehm\_test.m* - metoda zapisující do souboru *Testy.xlsx* výsledky testů Lehmerovy matice pro dané  $n$

*Pascal.m* - metoda vracející Pascalovu matici typu  $n \times n$  a její inverzi

*Low\_Pasc\_test.m* - metoda zapisující do souboru *Testy.xlsx* výsledky testů Pascalovy dolní trojúhelníkové matice pro dané  $n$

*Sym\_Pasc\_test.m* - metoda zapisující do souboru *Testy.xlsx* výsledky testů Pascalovy symetrické matice pro dané  $n$

*Vander.m* - metoda vracející Vandermondovu matici typu  $n \times n$  a její inverzi

*Vand\_test.m* - metoda zapisující do souboru *Testy.xlsx* výsledky testů Vandermondovy matice pro dané  $n$